

**METODI MATEMATICI PER  
L'INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE:  
APPUNTI 2016-2017  
PAOLA LORETI**

1. ELEMENTI DI TOPOLOGIA DI  $\mathbb{R}^m$

Ricordiamo che per  $x, y \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti proprietà

- $|x| \geq 0$
- $x \neq 0$  se e solo se  $|x| > 0$
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

1.1. **Norma.**  $\mathbb{R}^m$  con  $p > 1$ . La formula

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_m|^p)^{1/p}.$$

definisce una norma in  $\mathbb{R}^m$ . (da dimostrare più tardi tramite la disuguaglianza di Young, Holder, Minkowski).

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- $\|x\| \geq 0$ ,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

1.2. **Il prodotto scalare.** Il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^m$  è un numero reale dato da

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}^m \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Occorre verificare che valgono le seguenti proprietà

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \lambda(x \cdot y) = \lambda x \cdot y.$$

$$(x, x) = \|x\|^2$$

**Esempio 1.1.**

- *La formula*

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_m|, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

*definisce una norma su  $\mathbb{R}^m$ . Infatti dimostriamo la disuguaglianza triangolare*

$$\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + \dots + |x_m + y_m| \leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_m| + |y_m|$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1$$

- *La formula*

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_m|\}$$

definisce una norma su  $\mathbb{R}^m$ .

$$\|x + y\|_\infty = \max \{|x_1 + y_1|, \dots, |x_m + y_m|\} \leq \max \{|x_i|\} + \max \{|y_i|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Vale la relazione

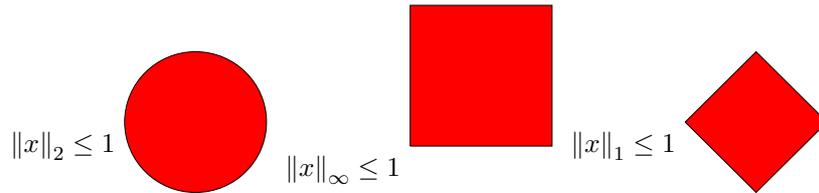
$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

Sfruttando la relazione tra le norme, valida per ogni  $p \geq 1$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$$

1.3. **Intorni.** Disegnare gli intorni

$$\|x\|_2 \leq 1 \quad \|x\|_\infty \leq 1 \quad \|x\|_1 \leq 1$$



Gli esempi appena visti sono casi particolari di una teoria molto importante. Ricordiamo alcune nozioni fondamentali

1.4. **Spazi vettoriali.** Uno spazio vettoriale su un campo  $K$  è un insieme  $V$  dotato di due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per scalare, caratterizzate da determinate proprietà

Gli elementi di  $V$  sono detti vettori e quelli di  $K$  scalari. Le operazioni sono:

-una somma dati due vettori  $u, v$  la somma fornisce un altro vettore indicato con  $u + v$ ,

$$(u, v) \rightarrow u + v$$

-un prodotto per scalare che dato un vettore  $v$  e uno scalare  $\lambda$  fornisce un altro vettore indicato con  $\lambda v$ .

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda v$$

Gli assiomi che queste due operazioni devono soddisfare sono i seguenti[

L'insieme  $V$  con la somma è un gruppo abeliano:

la somma è commutativa e associativa,

esiste quindi un elemento neutro  $0$ ,

ogni vettore  $v$  ha un opposto che è normalmente indicato con  $-v$  ;

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K \quad \forall u, v \in V$$

$$(\lambda + \lambda_1)v = \lambda v + \lambda_1 v \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \quad \forall v \in V$$

$$(\lambda \lambda_1)v = \lambda(\lambda_1 v) \quad \forall \lambda, \lambda_1 \in K \quad \forall v \in V$$

$$1v = v \quad \forall v \in V$$

Esempio  $\mathbb{R}^m$  su  $\mathbb{R}$ .

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$$

Sia  $V$  uno spazio vettoriale, un sottoinsieme  $W$  di  $V$  è un sottospazio vettoriale se è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di  $V$ .

$$\forall \lambda, \lambda_1 \in K, \forall u, v \in V \implies \lambda u + \lambda_1 v \in W$$

Notazione  $V(K)$ ,  $V$  su  $K$

**1.5. Spazi normati.** Uno spazio vettoriale  $X(\mathbb{R})$  munito di norma si chiama spazio vettoriale normato o semplicemente spazio normato.  $\forall x, y, z \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , valgono le proprietà:

- $\|x\| \geq 0$ ,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**1.6. Disuguaglianza di Young.** Dato  $p > 1$ ,  $p \in \mathbb{R}$  diciamo coniugato di  $p$  il numero reale  $q$  tale che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Teorema 1.2.** *Disuguaglianza di Young (esponenti reali): dati due numeri reali positivi  $a$  e  $b$ , e dati  $p, q$  numeri reali coniugati, si ha*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

**Dimostrazione 1.1.** *Fissiamo  $b > 0$*

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - tb = +\infty$$

$$f(0) = \frac{b^q}{q} > 0$$

$$f'(t) = t^{p-1} - b$$

$$t^{p-1} = b \iff t = b^{\frac{1}{p-1}}$$

$$f''(b^{\frac{1}{p-1}}) > 0$$

*Punto di minimo relativo che è anche punto di minimo assoluto*

$$f(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{\frac{1}{p-1}}b = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right)b^q = 0$$

*Allora risulta per ogni numero reale  $a \geq 0$*

$$f(a) \geq 0,$$

*ossia*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

**Teorema 1.3** (disuguaglianza di Hölder). *Per  $p, q$  esponenti coniugati e  $p, q \in [1, +\infty)$  e  $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$  abbiamo*

$$(1.1) \quad |x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Si fissi

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}, \quad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$$

Dalla disuguaglianza di Young

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$$

Sommando

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^m |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^m |y_i|^q}{\|y\|_q^q} = 1$$

Da cui si evince

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i = \sum_{i=1}^m \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq 1$$

e la disuguaglianza di Hölder segue

$$(1.2) \quad |x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

**Teorema 1.4** (Disuguaglianza Minkowski). Per  $p \in [1, +\infty)$  e  $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$  abbiamo

$$(1.3) \quad \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

$$\begin{aligned} |x_i + y_i|^p &= |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \leq \\ &|x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| \leq \|x\|_p \|(x + y)^{(p-1)}\|_q = \|x\|_p \left( \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |y_i| \leq \|y\|_p \|(x + y)^{(p-1)}\|_q = \|y\|_p \left( \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Quindi da  $(p-1)q = p$

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x + y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

e dividendo per  $\|x + y\|_p^{p-1}$  (assumendo non nullo) si ottiene la Disuguaglianza di Minkowski

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

**Esempio.**  $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$  dotato della norma euclidea di  $x$ . Dato un punto  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}.$$

Due norme  $\|x\|_a$   $\|x\|_b$  si dicono equivalenti se esistono due costanti  $m$  e  $M$  tali che

$$m \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M \|x\|_b.$$

Si ha che le norme  $p$  per  $p \geq 1$  sono tra loro equivalenti.

**Esercizio 1.** Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

calcolare la derivata direzionale di  $f$  nel punto  $(1, 2)$  lungo la direzione del vettore  $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

Calcolare il minimo e il massimo assoluti di  $f$  nella regione  $D$  delimitata dal trapezio di vertici

$$(1, 2), (-1, 2), (1/4, 1/2), (-1/4, 1/2),$$

compresi i lati

$$\text{Risposta } f_v = -\sqrt{2} \quad m = -4, \quad M = -3/16.$$

**Esercizio 2.** Data la funzione  $f(x, y) = x - y$  determinare minimi e massimi assoluti nell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$$

$$\text{Risposta } m = -3, \quad M = 3.$$

**Esercizio 3.** Data la funzione  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$  determinare minimi e massimi assoluti nel cerchio unitario

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\text{Risposta } m = -\sqrt{2}, \quad M = \sqrt{2}.$$

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Una norma su  $V$  è una funzione che a ogni vettore  $x$  di  $V$  associa un numero reale  $\|x\| \forall x, y, z \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- $\|x\| \geq 0$ ,
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Esempio  $\mathbb{R}^m$

**Definizione 1.5.** Definiamo la distanza tra due punti di  $\mathbb{R}^m$  tramite la formula

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

La base canonica in  $\mathbb{R}^N$  è data da  $e^1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $e^m = (0, 0, \dots, 1)$ .

$$e^j = (0, \dots, 1, 0 \dots 0)$$

$$e^k = (0, \dots, 0, 1 \dots 0).$$

$$d(e^j, e^k) = \sqrt{2} \quad j \neq k$$

$\mathbb{R}^m$  con la norma euclidea è un esempio di uno spazio metrico

$$(X, d)$$

$X$  insieme e  $d$  la metrica

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ogni spazio normato è uno spazio metrico, dove la distanza tra due punti  $x, y$  è data dalla norma del vettore  $x - y$ . In questi casi si dice che la metrica  $d$  è indotta dalla norma. Osserviamo che la metrica indotta da una norma ha in più le proprietà che non sono necessariamente vere in uno spazio metrico:

Invarianza per traslazioni

$$d(x + w, y + w) = d(x, y)$$

Riscalamento :

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

Non vale però il viceversa, esistono cioè spazi metrici la cui metrica  $d$  non può derivare da una norma, come mostra l'esempio: L'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, con la distanza data da

$$d(x, y) = \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan y|$$

La funzione è ben definita e positiva a valori in  $[0, 1)$

$$0 \leq \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{\pi} (|\arctan x| + |\arctan y|) < \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

La proprietà

$$\arctan x = \arctan y \iff x = y$$

segue dall'iniettività della funzione  $\arctan$ .

La simmetria

$$d(x, y) = \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{\pi} |\arctan y - \arctan x| = d(y, x)$$

è verificata.

Vale la disuguaglianza triangolare

$$d(x, y) = \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan z + \arctan z - \arctan y| \leq \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan z| + \frac{1}{\pi} |\arctan z - \arctan y| = d(x, z) + d(z, y)$$

La palla aperta unitaria in  $(\mathbb{R}, d)$  con  $d(x, y) = \frac{1}{\pi} |\arctan x - \frac{1}{\pi} \arctan y|$

$$B_1(x, 0) = x : \frac{1}{\pi} |\arctan x - \arctan 0| < 1 \iff |\arctan x| < \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dunque coincide con  $\mathbb{R}$ .

Vale

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulle due disuguaglianze

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y) \quad d(x, y) \geq -(d(x, z) - d(y, z))$$

Segue dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$$

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$$

$$-d(y, x) \leq d(x, z) - d(y, z)$$

$$-d(x, y) \leq d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y),$$

e dunque il risultato.

Definiamo l'intorno sferico (circolare) di centro  $x_0$  e raggio  $r$

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, x_0) < r\}.$$

Un insieme  $A \subset \mathbb{R}^N$  si dice aperto se ogni suo punto è centro di un intorno circolare interamente contenuto in  $A$ . In simboli

$$\forall x_0 \in A \exists r > 0 : B_r(x_0) \subset A$$

L'insieme di tutti gli aperti si chiama topologia generata dalla metrica.

**Proposizione 1.** *In uno spazio metrico ogni intorno circolare è un insieme aperto, ogni unione di aperti è un aperto, l'intersezione di due aperti è un aperto.*

Infatti  $\forall x_0 \in B_r(x_0) \exists r_1 : B_{r_1} \subset B_r(x_0)$ . Fissiamo

$$r_1 = r - d(x, x_0)$$

allora da

$$d(y, x) < r_1 \implies d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r - d(x, x_0) + d(x, x_0) = r$$

ovvero  $y \in B_r(x_0)$ . Dimostriamo ora che ogni unione di aperti è un aperto, Consideriamo una famiglia  $A_i$  di aperti. Sia  $x \in \cup A_i$ .

$x \in \cup A_i$  se  $\exists i$  tale che  $x \in A_i$ . Essendo  $A_i$  un aperto  $\exists r > 0$  tale che

$$B_r(x) \subset A_i \subseteq \cup A_i$$

## 2. CONVERGENZA

## 2.1. Successioni.

**Definizione 2.1.** Una successione  $(x_n)$   $x_n \in \mathbb{R}^m$  è convergente, se esiste un punto  $a \in \mathbb{R}^m$ , detto limite della successione tale che  $\|x_n - a\| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Diremo anche che  $(x_n)$  converge ad  $a$ , e scriviamo

$$x_n \rightarrow a \quad \text{anche} \quad \lim x_n = a$$

**Esempio 2.2.**

- Per  $m = 1$  si ha la nozione di convergenza per successioni reali

**Definizione 2.3.** Una successione  $(x_n)$   $x_n \in \mathbb{R}^m$  è una successione di Cauchy se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0$  tale che  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon, \forall n, m > \nu$

Equivalentemente

**Definizione 2.4.** Una successione  $(x_n)$   $x_n \in \mathbb{R}^m$  è una successione di Cauchy se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu > 0$  tale  $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon, \forall n > \nu, \forall p \in \mathbb{N}$

(Caratterizzazione della convergenza). Sia  $(x_n)$   $x_n \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^m$  scriviamo

$$x_n = (x_{n1}, \dots, x_{nm}) \quad \text{e} \quad a = (a_1, \dots, a_m).$$

Allora  $x_n \rightarrow a$  in  $\mathbb{R}^m \iff x_{nk} \rightarrow a_k$  in  $\mathbb{R}$ , per ciascuna componente  $k, k = 1, \dots, m$ .

In  $\mathbb{R}^m$  non valgono più i risultati che fanno uso della monotonia.

**Proposizione 2.** Siano  $(x_n), (y_n)$  due successioni con  $x_n, y_n \in \mathbb{R}^m$  e  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ .

- Il limite di una successione convergente è unico : se  $x_n \rightarrow a$  e  $x_n \rightarrow b$ , allora  $a = b$ .
- Se  $x_n \rightarrow a$ , allora  $x_{n_k} \rightarrow a$  per ogni sottosuccessione  $(x_{n_k})$  della successione  $(x_n)$ .
- Se  $x_n \rightarrow a$  e  $y_n \rightarrow b$ , allora  $x_n + y_n \rightarrow a + b$ .
- Se  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  (in  $\mathbb{R}$ ) e  $x_n \rightarrow a$  (in  $\mathbb{R}^m$ ), allora  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda a$  (in  $\mathbb{R}^m$ ).
- Se  $x_n \rightarrow a$  (in  $\mathbb{R}^m$ ), allora  $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$  (in  $\mathbb{R}$ ).

**Definizione 2.5.** Una successione  $(x_n)$   $x_n \in \mathbb{R}^m$  è limitata, se esiste  $L \in \mathbb{R}$  tale che  $\|x_n\| < L$  per ogni  $n$ .

Tutte le successioni convergenti sono limitate e vale

**Teorema 2.6.** (Bolzano–Weierstrass) Tutte le successioni limitate di  $\mathbb{R}^m$  ammettono una sottosuccessione convergente

**2.2. Spazi di Banach.** Lo spazio di Banach è uno spazio normato completo (ogni successione di Cauchy è convergente a un elemento dello spazio) rispetto alla metrica indotta dalla norma.

## ESERCIZIO 1

Dimostrare

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2}x^2 + \frac{y^2}{2\epsilon}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$$

Si ha

$$0 \leq (\epsilon x \pm y)^2 = \epsilon^2 x^2 + y^2 \pm 2\epsilon xy,$$

si divide poi per  $2\epsilon$ .

## ESERCIZIO 2

Dimostrare

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N \\ \|x + y\|^2 &= \sum_{k=1}^N (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^N x_k^2 + \sum_{k=1}^N y_k^2 + 2 \sum_{k=1}^N x_k y_k = \\ &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 3

Dimostrare

$$|x \cdot y| \leq \frac{\epsilon}{2} \|x\|^2 + \frac{\|y\|^2}{2\epsilon} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \epsilon > 0$$

Si ha

$$0 \leq \|\epsilon x \pm y\|^2 = \epsilon^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\epsilon x \cdot y,$$

si divide poi per  $2\epsilon$ .

## ESERCIZIO 4

Nel caso  $N = 2$ , dimostrare che la posizione seguente

$$\|x\|_{1/2} = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$$

non definisce una norma. (prendere i punti  $(0, 1/4)$  e  $(1/4, 0)$ , si trova che non è verificata la disuguaglianza triangolare.

### 2.3. Interno, Esterno, Frontiera di un insieme.

**Definizione 2.7.** Sia  $a \in \mathbb{R}^m$  e  $r > 0$  un numero reale.  $B_r(a)$  di centro  $a$  e raggio  $r$  per

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - a\| < r\}.$$

- Per  $m = 1$  troviamo gli intervalli  $]a - r, a + r[$ .
- Per  $m = 2$  troviamo il cerchio privato dei suoi punti frontiera
- Per  $m = 3$  troviamo la palla privata dei suoi punti frontiera

Sia  $A \subset \mathbb{R}^m$  e  $x \in \mathbb{R}^m$ .

- $x$  è un *punto interno* di  $A$  se esiste  $r > 0$  tale  $B_r(x) \subset A$ .
- $x$  è un *punto esterno* di  $A$  se esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$ .
- $x$  è un *punto frontiera* di  $A$  se  $B_r(x)$  incontra  $A$  e  $\mathbb{R}^m \setminus A$  per ogni  $r > 0$ .

L'insieme dei punti interni esterni e di frontiera si chiama *interno*, *esterno* e la *frontiera* di  $A$ , e si denota con  $\text{int}(A)$ ,  $\text{ext}(A)$  e  $\partial A$ . Si utilizza anche la notazione  $A^\circ$  invece di  $\text{int}(A)$ .

Sia  $A \subset \mathbb{R}^m$ .

- Gli insiemi  $\text{int}(A)$ ,  $\text{ext}(A)$ ,  $\partial A$  formano una *partizione* di  $\mathbb{R}^m$ : sono disgiunti e la loro riunione fornisce  $\mathbb{R}^m$ .

### 2.4. Insiemi aperti, chiusi, compatti.

**Definizione 2.8.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^m$  e  $x \in \mathbb{R}^m$ . Si dice che il punto  $x$  è di *aderenza* per  $X$  se la palla  $B_r(x)$  incontra  $X$  per ogni  $r > 0$ . L'insieme dei punti  $x$  con questa proprietà si chiama *aderenza* di  $X$  e si denota con  $\overline{X}$ .

**Proposizione 3.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^m$  e  $x \in \mathbb{R}^m$ , allora

$$x \in \overline{X} \iff \exists (x_n) \subset X \text{ e } x_n \rightarrow x$$

**Definizione 2.9.** Sia  $X \subset \mathbb{R}^m$ . Si dice che  $X$  è un *insieme aperto* se per ogni  $x \in X$  se esiste  $r > 0$  tale che la palla  $B_r(x)$  è interamente contenuta in  $X$ .

Dati due punti distinti di  $\mathbb{R}^m$   $x$  e  $y$  esistono due aperti  $X$  e  $Y$  tali che  $x \in X$   $y \in Y$  e  $X \cap Y = \emptyset$ .

**Proposizione 4.**  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^m$  sono aperti. L'unione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto.

**Definizione 2.10.** Un insieme  $X$  è *chiuso* se l'insieme complementare in  $\mathbb{R}^m$  è aperto

$\overline{X}$  è il più piccolo insieme chiuso che contiene  $X$ .

**Proposizione 5.**  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^m$  sono chiusi. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso. L'intersezione qualunque di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

**Definizione 2.11.**  $K$  è limitato  $\iff$  esiste una costante  $L$  tale che  $\|x\| < L$  per ogni  $x \in K$

Il diametro di  $K$  è definito come

$$\text{diam}(K) = \sup\{d(x, y), x, y \in K\}.$$

Se  $\text{diam}(K) = +\infty$  diremo che  $K$  è illimitato.

**Definizione 2.12.**  $K$  è compatto se  $\forall (x_n) \subset X$  esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})$  con  $\lim x_{n_k} \in X$

**Teorema 2.13. (Teorema di Heine-Borel)**  $K$  compatto di  $\mathbb{R}^m \iff K$  è chiuso e limitato

L'intersezione infinita di una famiglia infinita di aperti può non essere aperta. Esempio  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ . L'intersezione  $\{0\}$ : un insieme chiuso.

$\emptyset$  e  $\mathbb{R}^m$  sono gli unici insiemi che sono sia aperti che chiusi.

Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi, ad esempio gli intervalli di  $\mathbb{R}$  a cui appartiene un solo estremo.

**2.5. Funzioni.**  $A$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^m$ .

**Lemma 2.14.** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $a \in A$

Le due proprietà seguenti sono equivalenti

(a)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $x \in A$  e  $\|x - a\| < \delta$ , allora

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

(b)  $(x_n) x_n \in A$  e  $x_n \rightarrow a$ , allora  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

$f$  è continua in  $A$  se è continua in ogni punto  $a \in A$ , ossia

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $x \in A$  e  $\|x - a\| < \delta$ , allora  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

**2.6. Teorema di Weierstrass.** Una funzione continua in un compatto ammette minimo e massimo assoluto.

Definizione della derivata di  $f$  in  $\bar{x}$

**Definizione 2.15.**

$$f_{x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + h, \dots, \bar{x}_m) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_m)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

**Definizione 2.16.** Definizione del gradiente di  $f$ .

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Definizione del Laplaciano di  $f$ .

**Definizione 2.17.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$

$$f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}$$

$\Delta$  è l'operatore di Laplace o Laplaciano.

**Esempio 2.18.** Calcolare il gradiente di  $f$  per

- i)  $f(x) = \|x\|^2$
- ii)  $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|$
- iii) per  $n \geq 3$   $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|^{2-n}$ 
  - i) r1  $f(x) = \|x\|^2$   $f_{x_i} = 2x_i$
  - ii) r2  $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|$   $f_{x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$
  - iii) r3 per  $n \geq 3$   $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|^{2-n}$   
 $f_{x_i} = (2-n) \|x\|^{1-n} \frac{x_i}{\|x\|} = (2-n) \frac{x_i}{\|x\|^n}$

**Esempio 2.19.** Calcolare il Laplaciano di  $f$  per

- i)  $f(x) = \|x\|^2$
- ii)  $f(x) = \|x\|$
- iii) per  $n \geq 3$   $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|^{2-n}$ 
  - i) r1  $f(x) = \|x\|^2$   $f_{x_i} = 2x_i$   $f_{x_i x_i} = 2$   $\Delta \|x\|^2 = 2n$
  - ii) r2  $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|$   $f_{x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$

$$f_{x_i x_i} = \frac{1}{\|x\|} + \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$$

$$\Delta \|x\| = n \frac{1}{\|x\|} + 1$$

- iii) r3 per  $n \geq 3$   $x \neq 0$   $f(x) = \|x\|^{2-n}$   
 $f_{x_i} = (2-n) \|x\|^{1-n} \frac{x_i}{\|x\|} = (2-n) \frac{x_i}{\|x\|^n}$   
 $f_{x_i x_i} = (2-n) \frac{1}{\|x\|^n} - n(2-n) x_i^2 \|x\|^{-n-2}$

$$\Delta \|x\|^{2-n} = (2-n)n \frac{1}{\|x\|^n} - (2-n)n \frac{1}{\|x\|^n} = 0$$

**2.7. Principio del massimo per le funzioni armoniche.** Sia  $\Omega$  un insieme aperto e limitato. Sia  $f \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Una funzione armonica soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta f = 0$$

Osserviamo che somma e differenza di funzioni armoniche sono funzioni armoniche. Sia

$$M = \max\{f(x), x \in \partial\Omega\}$$

$$m = \min\{f(x), x \in \partial\Omega\},$$

e  $f$  una funzione armonica.

Si ha

**Principio del massimo per le funzioni armoniche**

$$m \leq f(x) \leq M \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Dimostremo

$$f(x) \leq M \quad x \in \bar{\Omega}.$$

La dimostrazione è basata sullo studio della funzione

$$g_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon \|x\|^2 \quad x \in \bar{\Omega}.$$

$$g_\epsilon(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

$$\Delta g_\epsilon(x) = \Delta f(x) + 2\epsilon n > 0$$

Allora non ci sono punti di massimo relativi interni per  $g_\epsilon$ , perché in tali punti  $x_\epsilon$  il Laplaciano  $\Delta g_\epsilon(x_\epsilon) \leq 0$  (in dettaglio il caso  $n = 2$ ). Allora se  $x \in \bar{\Omega}$  si ha

$$g_\epsilon(x) \leq \max\{f(x) + \epsilon \|x\|^2, x \in \partial\Omega\}.$$

Ricordando che  $\bar{\Omega}$  è limitato per ipotesi, si ha che esiste un numero reale  $L$  tale che

$$\|x\| \leq L \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Se  $x \in \bar{\Omega}$

$$g_\epsilon(x) \leq \max\{f(x) + \epsilon L^2, x \in \partial\Omega\} = M + \epsilon L^2,$$

ossia

$$f(x) + \epsilon \|x\|^2 \leq M + \epsilon L^2.$$

Il risultato segue per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Svolgere

$$m \leq f(x) \quad x \in \bar{\Omega},$$

considerando la funzione

$$g_\epsilon(x) = f(x) - \epsilon \|x\|^2 \quad x \in \bar{\Omega}.$$

### 3. IL TEOREMA DI WEIERSTRASS IN SPAZI METRICI

**Definizione 3.1.** *Un sottoinsieme  $K$  dello spazio metrico  $X, d$  si dice compatto se da ogni successione  $x_k$  di punti di  $K$  si può estrarre una sottosuccessione convergente verso un punto  $x \in K$*

**Definizione 3.2.** *Sia  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  due spazi metrici.  $f : X \rightarrow Y$  è continua in  $x_0 \in X$  se  $\forall x_k \subset X \rightarrow x_0$  (ossia  $d_X(x_k, x_0) \rightarrow 0$ ), risulta  $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$  (ossia  $d_Y(f(x_k), f(x_0)) \rightarrow 0$ ).  
 $f$  è continua in  $X$  se è continua in ogni punto di  $X$ .*

Sia  $K$  un sottoinsieme compatto dello spazio metrico  $X, d$  e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora

**Definizione 3.3.** *Un punto  $x_0$  del sottoinsieme  $K$  dello spazio metrico  $(X, d)$  è di massimo assoluto per la funzione  $f$  se*

$$\forall x \in K \quad f(x) \leq f(x_0)$$

*Un punto  $x_0$  del sottoinsieme  $K$  dello spazio metrico  $(X, d)$  è di minimo assoluto per la funzione  $f$  se*

$$\forall x \in K \quad f(x) \geq f(x_0)$$

**Teorema 3.4.** *Sia  $K$  un sottoinsieme compatto dello spazio metrico  $(X, d)$  e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora  $f$  è dotata di minimo e massimo assoluti su  $K$ .*

**Dimostrazione 3.1.** *Consideriamo dapprima la dimostrazione che  $f$  è dotata di massimo assoluto su  $K$ . Occorre dimostrare che detto*

$$M = \sup\{f(x) : x \in K\},$$

*allora*

$$M \neq +\infty$$

*e*

$$\exists x_0 \in K : f(x_0) = M$$

*Come primo punto verificiamo che esiste una successione  $x_k$  in  $K$  tale che*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = M$$

*Se  $M \neq +\infty$  segue dalla proprietà del sup*

$$\forall k \exists x_k \in K : M - \frac{1}{k} < f(x_k) \leq M$$

*Se  $M = +\infty$*

$$\forall k \exists x_k \in K : f(x_k) > k$$

*In ogni caso  $f(x_k) \rightarrow M$ .*

*$K$  è un insieme compatto quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento  $x_0 \in K$ :  $f(x_{k_h}) \rightarrow f(x_0)$  per la continuità di  $f$ .*

$$M = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f(x_{k_h}) = f(x_0)$$

*$M \neq +\infty$  e*

$$\exists x_0 \in K : f(x_0) = M.$$

*Analogamente per stabilire l'esistenza del punto di minimo.*

**3.1. Funzione Distanza.** Consideriamo la funzione distanza di  $x \in \mathbb{R}^N$

$$(3.1) \quad dist_K(x) = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

$\|x - y\|$ : si tratta di una funzione continua,  $K$  è un insieme compatto, come applicazione del teorema di Weierstrass, abbiamo che il minimo è assunto. Allora per qualche  $y^* \in K$ .

$$dist_K(x) = \|x - y^*\|$$

$dist_K : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione distanza di  $x \in \mathbb{R}^N$  dall'insieme compatto  $K$  è allora definita

$$dist_K(x) = \min_{y \in K} \|x - y\|.$$

Vale 0 in  $K$ .

**Proposizione 6.** *Sia  $K$  un insieme compatto. Allora  $dist_K$  è Lipschitz continua*

$$|dist_K(x) - dist_K(x')| \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^N.$$

**Dimostrazione 3.2.**  *$dist_K(x') = x' - \hat{y}$  per qualche  $\hat{y} \in K$  allora*

$$dist_K(x) - dist_K(x') \leq \|x - \hat{y}\| - \|x' - \hat{y}\| \leq \|x - x'\|.$$

*La dimostrazione segue scambiando il ruolo di  $x$  and  $x'$ .*

Vale il seguente risultato di separazione. Siano  $X$  e  $Y$  sono due insiemi compatti non vuoti e disgiunti di  $\mathbb{R}^m$ . Allora

$$f(x) = \frac{dist(x, X)}{dist(x, X) + dist(x, Y)}$$

verifica

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in X \\ 1 & x \in Y \end{cases},$$

ossia  $f$  separa  $X$  e  $Y$

**3.2. Esempio con uso del moltiplicatore di Lagrange.** Ricordiamo che

- La condizione al primo ordine non distingue massimi, minimi o punti di sella
- Nel caso di funzioni  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  possiamo calcolare i massimi e minimi assoluti della funzione  $f$  confrontando i valori della funzione tra punti interni in cui si annulla il gradiente e il massimo e il minimo valore della funzione sulla frontiera.

Breve introduzione nel caso  $N = 2$ .

Equazione del vincolo. Sia  $g$  una funzione regolare.

$$V = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$$

Assumiamo che  $V$  sia il sostegno di una curva regolare semplice  $\gamma$  di equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I$$

Supponiamo che  $t_0 = (x_0, y_0)$  sia un punto di massimo o minimo relativo per la funzione  $\phi$

$$\phi(t_0) = f(x_1(t_0), x_2(t_0))$$

$$\phi'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = 0$$

In corrispondenza di un massimo o di un minimo relativo per  $f$  il gradiente di  $f$  deve essere ortogonale alla curva  $\gamma = (x(t), y(t))$  (ricordiamo  $V = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  e  $V$  sostegno di una curva regolare semplice  $\gamma$ )

Si può dimostrare il seguente

**Teorema 3.5.** *Siano  $f$  e  $g$  funzioni  $C^1(A)$  con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $(x_0, y_0)$  un punto regolare per  $V$ . Allora  $(x_0, y_0)$  è un punto stazionario vincolato a  $V$  se e sole se  $\exists$  un numero reale  $\lambda_0$  tale che*

$$Df(x_0, y_0) + \lambda_0 Dg(x_0, y_0)$$

Definiamo

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

La funzione  $L$  si chiama funzione Lagrangiana. Dipende anche dalla variabile  $\lambda$ , che prende il nome di moltiplicatore di Lagrange. Risolveremo il sistema

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione è l'equazione del vincolo e il sistema diventa

$$\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 3.6.** *Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  trovare quello di area massima.*

Possiamo calcolare con un metodo di sostituzione ( $2x$ ,  $2y$  semi-lato)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \iff y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Segue

$$f(x) = 4xy = \frac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = 0$$

Si ricava  $x = a/\sqrt{2}$ ,  $y = b/\sqrt{2}$   $f(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}) = 2ab$

**Esercizio 3.7.** *Tra tutti i rettangoli inscritti nell'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  trovare quello di area massima.*

( $2x$ ,  $2y$  semi-lato)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

In forma parametrica

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) & t \in [0, \pi/2] \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$$

$$\phi(t) = 4ab \cos(t) \sin(t) = 2ab \sin(2t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\phi'(t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\phi(\pi/4) = 2ab \quad \phi(0) = \phi(\pi/2) = 0$$

3.2.1. *Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

$$\begin{cases} \max_{x,y} 4xy \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, \lambda) = \max_{x,y} 4xy + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione  $L$

$$\begin{cases} 4y + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 4x + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Si ricava dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{2a^2 y}{x}$$

Sostituendo e semplificando

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 = \frac{a^2}{2}, \end{cases}$$

la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

**Esercizio 3.8.** *Tra tutti i parallelepipedi retti a base rettangolare inscritti in un ellissoide di equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*determinare quello di volume massimo.*

Se  $x, y, z$  indicano i semispigoli si tratta di massimizzare la funzione

$$f(x, y, z) = 8xyz,$$

soggetta al vincolo  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , con  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

Il problema può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \max_{x,y,z} 8xyz \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

### 3.3. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\begin{cases} \max_{x,y,z} 8xyz \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$L(x, y, z, \lambda) = \max_{x,y,z} 8xyz + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione  $L$

$$\begin{cases} 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\ 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\ 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Si ricava dalla prima equazione

$$\lambda = -\frac{4a^2yz}{x}$$

$$\begin{cases} 8x^2zb^2 - 8a^2y^2z = 0 \\ 8x^2yc^2 + 8yz^2a^2 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Semplificando

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x^2 = \frac{a^2}{3}, \end{cases}$$

la cui soluzione positiva è

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Dunque

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

**Esercizio 3.9.** Siano  $a_i > 0 \forall i = 1, \dots, N$ . Massimizzare la funzione

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = 2^N \prod_{i=1}^N x_i,$$

sotto la condizione

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, \quad x_i > 0 \forall i = 1, \dots, N$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda) = \max_{x_i} 2^N \prod_{i=1}^N x_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 \right)$$

Si calcolano i punti stazionari della funzione  $L$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda)}{\partial x_k} = 2^N \prod_{i=1, i \neq k}^N x_i + \frac{2\lambda x_k}{a_k^2} = 0 \quad k = 1, \dots, N$$

Si ricava dalla prima equazione ( $k = 1$ )

$$\lambda = - \frac{2^{N-1} a_1^2 \prod_{i=2}^N x_i}{x_1}$$

Sostituendo in tutte le altre

$$2^N a_k^2 x_1^2 \prod_{i=2, i \neq k}^N x_i - 2^N x_k a_1^2 \prod_{i=2}^N x_i = 0 \quad k = 2, \dots, N$$

Semplificando

$$a_k^2 x_1^2 - x_k^2 a_1^2 = 0 \quad k = 2, \dots, N$$

Semplificando

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_2^2}{a_2^2} \\ \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_3^2}{a_3^2} \\ \dots \\ \frac{x_1^2}{a_1^2} = \frac{x_N^2}{a_N^2} \\ \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, \\ x_i > 0 \forall i = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

$$x_1^2 = \frac{a_1^2}{N},$$

la cui soluzione positiva è

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{N}}.$$

Dunque

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{N}} \quad i = 1, \dots, N$$

**Esercizio 3.10.** Calcolare per  $a$  e  $b$  non entrambi nulli il minimo e il massimo assoluti della funzione  $ax + by$  nell'insieme  $x^2 + y^2 = 1$ .

Si definisce la funzione Lagrangiana

$$f(x, y, \lambda) = ax + by + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori si ricava

$$m = -\sqrt{a^2 + b^2}, \quad M = \sqrt{a^2 + b^2}$$

#### 4. CALCOLO DIFFERENZIALE IN $\mathbb{R}^N$

Definizione della derivata parziale prima di  $f$  in  $\bar{x} \in A$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$

**Definizione 4.1.**

$$f_{x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i + h, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

**Definizione 4.2.** Definizione del gradiente di  $f$ .

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

**Definizione 4.3.**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice differenziabile in  $x \in A$  se esiste il gradiente di  $f$  e se vale la relazione di limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Si può anche scrivere

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + o(\|h\|) \quad h \rightarrow 0$$

$f$  è differenziabile in  $A$  se è differenziabile in ogni punto appartenente all'insieme aperto  $A$ .

Se  $f$  è differenziabile in  $x \in A$  allora  $f$  è continua in  $x$  Infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} Df(x) \cdot h + o(\|h\|) = f(x)$$

**Teorema 4.4. Teorema del differenziale** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$  sono continue in  $x \in A$  allora  $f$  è differenziabile in  $x \in A$

**Teorema 4.5. Teorema di derivazione delle funzioni composte** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  sono derivabili in  $t \in I$  e se  $f$  è differenziabile in  $x(t) \in A$  allora

$$F(t) = f(x(t))$$

è derivabile in  $t$  e la sua derivata vale

$$F'(t) = Df(x(t)) \cdot x'(t)$$

**Teorema 4.6. Derivata direzionale di funzioni differenziabili** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x \in A$  allora  $f$  ammette derivata direzionale in ogni direzione  $\lambda$  e vale la relazione

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(x) = Df(x) \cdot \lambda$$

**Esercizio 4.7.** Sia  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Per  $x \neq 0$

$$f(x) = \ln \|x\|$$

$$f_{x_i} = \frac{x_i}{\|x\|^2}$$

$$f_{x_i x_i} = \frac{1}{\|x\|^2} - 2 \frac{x_i}{\|x\|^3} \frac{x_i}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|^2} - 2 \frac{x_i^2}{\|x\|^4}$$

$$\Delta \ln \|x\| = (n-2) \frac{1}{\|x\|^2}$$

Se  $n = 2$  allora  $\Delta \ln \|x\| = 0$ .

## 5. ESERCIZI SU MINIMI E MASSIMI RELATIVI IN $\mathbb{R}^2$

**Esercizio 5.1.** Data  $f(x, y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$  in  $\mathbb{R}^2$ , calcolarne eventuali massimi e minimi relativi.

Cerchiamo i punti stazionari

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3(1 + x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo il sistema sostituendo alla prima equazione la differenza tra la prima e la seconda:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^2 - (1 + x + y)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - y)(x + y) = 0 \\ y^2 - (1 + x + y)^2 \end{cases}$$

da cui otteniamo due sottosistemi

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - (1 + x + y)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ y^2 - (1 + x + y)^2 = 0 \end{cases}$$

Per il primo possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x = -y \\ y^2 - (1 - y + y)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

ottenendo i punti  $A(1, -1)$  e  $B(-1, 1)$ .

Passando al secondo sistema

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - (1 + 2y)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ 3y^2 + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

ottenendo i punti  $C(-1, -1)$  e  $D(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ .

Calcoliamo ora la matrice Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6(1 + x + y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6(1 + x + y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6(1 + x + y)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Per  $A(1, -1)$

$$\begin{vmatrix} 6 - 6(1 + 1 - 1) & -6(1 + 1 - 1) \\ -6 & 6 - 6(1 + 1 - 1) \end{vmatrix} = -36 < 0$$

il determinante della matrice è negativo, il punto è di sella.

Per  $B(-1, 1)$

$$\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

il determinante della matrice risulta negativo, il punto è di sella.

Per  $C(-1, -1)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

il determinante della matrice è negativo, il punto è di sella.

Per  $D(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Poichè il determinante della matrice è positivo e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) = -4 < 0$ ,  $D$  è un punto di massimo relativo.

**Esercizio.** Classificare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in  $\mathbb{R}^2$  da

$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$

**Soluzione:**

I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi & j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si hanno dunque infiniti punti stazionari, ciascuno di coordinate  $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$ , al variare di  $k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$ . La matrice hessiana in un generico punto  $(x, y)$  è

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{pmatrix}.$$

Calcolandola in un generico punto stazionario diventa

$$H(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana in un generico punto stazionario risulta  $(-1)^{j+k}$ . Dunque, se  $k$  e  $j$  sono entrambi pari o entrambi dispari, il determinante risulta pari a 1 e dunque positivo; si tratterà di punti di max o min relativo a seconda del segni di  $(-1)^{k+1}$ : se  $k$  è pari si tratta di un punto di max relativo, se  $k$  è dispari si tratta di un minimo relativo. Ripetendo se  $k$  e  $j$  sono entrambi pari si tratta di un massimo relativo. Se invece  $k$  e  $j$  sono entrambi dispari si tratta di un minimo relativo. Infine se  $k$  è pari e  $j$  è dispari (o viceversa), abbiamo un punto di sella poiché il valore del determinante è  $-1$ .

## 6. LA FORMULA DI TAYLOR IN $\mathbb{R}^n$

Assumeremo ipotesi di regolarità. Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $h = (h_1, h_2), \dots, h_n$ , i punti  $x_0, x_0 + h$  siano appartenenti all'insieme  $A$ . Sia  $f \in C^2(A)$ .

**6.1. La formula di Taylor in  $\mathbb{R}^N$  con il resto di Lagrange.** Dimostreremo la seguente formula

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0 + \theta h)h_i h_j$$

Dalla  $x(t) = x + th$  con  $h$  piccolo e  $h \in \mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$F(t) = f(x + th).$$

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte ove  $x(t) = x + th$ , si ottiene

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x + th)h_i,$$

applicandola di nuovo

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x + th)h_i h_j,$$

dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile reale si ottiene

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta)$$

con  $\theta \in (0, 1)$ .

Sostituendo in  $F(t) = f(x + th)$  si ottiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0 + \theta h)h_i h_j$$

**Teorema 6.1.** *Sia  $f \in C^2(A)$ . Sianno  $x, x + h$  punti di  $A$  : il segmento di estremi  $x, x + h$  sia contenuto in  $A$ . Esiste  $\theta \in (0, 1)$  tale che*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0 + \theta h)h_i h_j$$

**6.2. La formula di Taylor in  $\mathbb{R}^n$  con il resto di Peano.** Dimostreremo la seguente formula

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x + \theta h)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \rightarrow 0$$

Occorre dimostrare che

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0 + \theta h)h_i h_j &= \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x_0)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \rightarrow 0 \\ \sum_{i,j=1}^n (f_{x_i x_j}(x_0 + \theta h) - f_{x_i x_j}(x_0))h_i h_j &= o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Occorre tener presente la disuguaglianza

**Proposizione 7.** *Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ . Sia  $h$  in  $\mathbb{R}^n$ . Allora*

$$\|Ah\| \leq \|A\| \|h\|$$

ove  $\|A\|$  è la norma di Frobenius della matrice  $A$  definita come

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

*Proof.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 + \dots + a_{1n}h_n \\ \dots \\ a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + a_{n3}h_3 + \dots + a_{nn}h_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ah\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + a_{i3}h_3 + \dots + a_{in}h_n)^2}$$

$$\|Ah\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \|h\| = \|A\| \|h\|$$

□

Segue

$$|Ah \cdot h| \leq \|Ah\| \|h\| \leq \|A\| \|h\|^2$$

**Teorema 6.2.** *Sia  $f \in C^2(A)$ . Siano  $x, x+h$  punti di  $A$  : il segmento di estremi  $x, x+h$  sia contenuto in  $A$ . Allora*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(x+\theta h)h_i h_j + o(\|h\|^2) \quad h \rightarrow 0$$

Infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \sum_{i,j=1}^n (f_{x_i x_j}(x_0 + \theta h) - f_{x_i x_j}(x_0))h_i h_j \right|}{\|h\|^2} \leq$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D^2 f(x_0 + \theta h) - D^2 f(x_0)\| = 0$$

### 6.3. Minimi e Massimi Locali.

**Definizione 6.3.** *Sia  $A$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in A$ . Se esiste  $r > 0$  tale che comunque preso  $x \in A \cap B_r(x_0)$  risulta  $f(x) \geq f(x_0)$  allora  $x_0$  è un punto di minimo locale e  $f(x_0)$  è minimo locale*

**Definizione 6.4.** *Sia  $A$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in A$ . Se esiste  $r > 0$  tale che comunque preso  $x \in A \cap B_r(x_0)$  risulta  $f(x) \leq f(x_0)$  allora  $x_0$  è un punto di massimo locale e  $f(x_0)$  è massimo locale*

### 6.4. Matrice Hessiana.

**Definizione 6.5.** *Sia  $f \in C^2(A)$ . La Matrice Hessiana è allora una matrice simmetrica data da*

$$Hf(x_0) = (f_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,n}$$

6.4.1. *Minimi e Massimi Locali,  $n=2$ .* Consideriamo le forme quadratiche nel caso di dimensione due associate alla matrice hessiana. Ricordiamo che la matrice hessiana, o matrice di Hesse, nel caso  $n = 2$  è la matrice quadrata  $2 \times 2$  delle derivate parziali seconde della funzione.

$$(Hf)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2$$

ove il simbolo  $\partial x_i \partial x_j$  indica che prima deriviamo rispetto a  $x_i$  e poi rispetto a  $x_j$ .

**Definizione 6.6.** Una matrice  $Q$  si dice non negativa (rispettivamente, non positiva) se la forma  $z^T Q z$  è semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se

$$z^T Q z = \sum_{i,j=1}^2 q_{i,j} z_i z_j \geq 0$$

(rispettivamente,  $z^T Q z \leq 0$ ),  $\forall z \in \mathbb{R}^2$ ,

e se esiste  $z \in \mathbb{R}^2$  non nullo tale la forma quadratica è nulla.

**Definizione 6.7.** Una matrice  $Q$  si dice positiva (rispettivamente, negativa) se la forma  $z^T Q z$  è positiva (rispettivamente, negativa)

$$z^T Q z = \sum_{i,j=1}^2 q_{i,j} z_i z_j > 0 \quad (z^T Q z < 0) \quad \forall z \in \mathbb{R}^2, z \neq 0.$$

Se restringiamo l'analisi alle matrici  $2 \times 2$  allora abbiamo il seguente

**Teorema 6.8.** Sia

$$(6.1) \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica.

$$|Q| = \det Q = q_{11}q_{22} - (q_{12})^2.$$

Allora

$$|Q| > 0 \quad \text{e} \quad q_{11} > 0, \implies Q > 0$$

$$|Q| > 0 \quad \text{e} \quad q_{11} < 0, \implies Q < 0$$

Se  $\det Q < 0$ , allora  $Q$  è indefinita.

**Dimostrazione 6.1.** Data la forma quadratica

$$ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2,$$

essa può essere equivalentemente scritta

$$a \left( h_1 + \frac{b}{a} h_2 \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a} h_2^2,$$

da questa formula si evince chiaramente il risultato.

Se la matrice  $Q$  è la matrice Hessiana ritroviamo un caso già studiato

$$(6.2) \quad Hf = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) \left( h_1 + \frac{f_{xy}(x_0, y_0)}{f_{xx}(x_0, y_0)} h_2 \right)^2 + \frac{f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2}{f_{xx}(x_0, y_0)} h_2^2,$$

Torniamo al caso  $n$  dimensionale. Se  $x_0$  è un punto stazionario ossia  $Df(x_0) = 0$ , la formula diventa

$$f(x+h) = f(x_0) + \frac{1}{2}D^2f(x_0)h \cdot h + o(\|h\|^2), \quad h \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{2}D^2f(x_0)h \cdot h \cdot (x - x_0) + o(\|h\|^2) \geq 0$$

allora localmente

$$f(x) \geq f(x_0),$$

vicino a  $x_0$  cosicché il punto  $x_0$  è un punto di minimo locale.

Per studiare minimi e massimi locali in  $\mathbb{R}^n$  dobbiamo ora studiare la positività delle forme quadratiche o equivalentemente la positività della matrice  $D^2f(x_0)$ :

$$D^2f(x_0) > 0$$

Valgono

**Teorema 6.9.** *Condizione necessaria del secondo ordine. Sia  $A$  un aperto. Sia  $f \in C^2(A)$ ,  $x_0$  punto di minimo (massimo) relativo allora la matrice Hessiana nel punto  $x_0$  è semidefinita positiva.*

**Teorema 6.10.** *Condizione sufficiente del secondo ordine. Sia  $A$  un aperto. Sia  $f \in C^2(A)$ ,  $x_0$  un punto stazionario in cui la matrice Hessiana è definita positiva allora  $x_0$  è un punto di minimo (massimo) relativo.*

## 7. FORME QUADRATICHE

**Forme Quadratiche** Una forma quadratica é un polinomio omogeneo di grado 2 in  $n$  variabili.

In generale  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i \neq j}^n a_{i,j} x_i x_j$$

$$A = (a_{i,j})$$

In forma di prodotto scalare

$$q(x) = Ax \cdot x$$

In forma matriciale

$$q(x) = x^T Ax$$

A una forma quadratica resta associata una matrice simmetrica.

Una matrice  $Q$  si dice *positiva* (rispettivamente, *negativa*) se la forma  $z^T Q z$  è *positiva* (rispettivamente, *negativa*)

$$z^T Q z = \sum_{i,j=1}^n q_{i,j} z_i z_j \quad 0 \quad (z^T Q z < 0) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, x, y \neq 0.$$

Un esempio di matrice positiva è data da

$$(7.1) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

poichè  $x^2 + y^2 > 0$ .

Una matrice  $Q$  si dice *non negativa* (rispettivamente, *non positiva*)  $\iff$  la forma  $z^T Q z$  ( $z = (x, y)$ ) is semidefinita positiva (rispettivamente negativa) cioè se

$$z^T Q z = \sum_{i,j=1}^n q_{i,j} z_i z_j \geq 0$$

(rispettivamente,  $z^T Q z \leq 0$ ),  $\forall z \in \mathbb{R}^n$

e se esiste  $z \in \mathbb{R}^n$  non nullo tale la forma quadratica è nulla.

Un esempio di matrice non negativa è data da

$$(7.2) \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice  $Q$  si dice indefinita se esistono  $\bar{z}$  e  $\hat{z}$  tali che

$$\sum_{i,j=1}^n q_{i,j} \bar{z}_i \bar{z}_j > 0 \quad \sum_{i,j=1}^n q_{i,j} \hat{z}_i \hat{z}_j < 0$$

$$(7.3) \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7.1.  $N = 3$ . Come riconoscere se la forma quadratica ( o la matrice associata) è definita positiva ossia

$$q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j \geq 0, \quad \forall x \neq 0$$

Esercizi di riscrittura dalla forma alla matrice associata e viceversa.

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 24x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & -12 & -3 \\ -12 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo degli autovalori.

Ricordiamo che se  $A$  è una matrice simmetrica allora tutti gli autovalori sono reali. Vale

**Teorema 7.1.**  *$A$  è una matrice definita positiva se e solo se gli autovalori sono positivi*

Infatti

**Teorema 7.2.** *Indichiamo con  $m$  e  $M$  il più piccolo e il più grande autovalore della matrice simmetrica  $A$ . Allora*

$$m \|h\|^2 \leq Ah \cdot h \leq M \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

*Proof.* Consideriamo la funzione

$$F(h) = Ah \cdot h = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j,$$

nell'insieme

$$K = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$$

Per il teorema di Weierstrass  $F$  assume minimo e massimo assoluti in  $K$ .

Siano  $h_{m1}, h_{M1}$

$$F(h_{m1}) = m_1 \quad F(h_{M1}) = M_1$$

$$F(h_{m1}) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j \leq F(h_{M1}) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1$$

Sia

$$\mu = \frac{h}{\|h\|}, \quad h \neq 0$$

$\|\mu\| = 1$ ,

$$m_1 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \mu_i \mu_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{h_i h_j}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j \leq M_1$$

Posto

$$G(h) = \frac{1}{\|h\|^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad h \neq 0,$$

$h_{m1}$  punto di minimo,  $h_{M1}$  punto di massimo.

$$G_{h_i} = \frac{1}{\|h\|^4} \left( \|h\|^2 \frac{\partial}{\partial h_i} Ah \cdot h - Ah \cdot h \frac{\partial}{\partial h_i} \|h\|^2 \right) =$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \left( \frac{1}{\|h\|^2} \right) = \frac{\partial}{\partial h_i} \left( \frac{1}{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} \right) = - \frac{2h_i}{(h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2)^2} = - \frac{2h_i}{\|h\|^4}$$

Ricordiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 + \dots + a_{1i}h_i + \dots + a_{1n}h_n \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + a_{23}h_3 + \dots + a_{2i}h_i + \dots + a_{2n}h_n \\ \dots \\ a_{i1}h_1 + a_{i2}h_2 + a_{i3}h_3 + \dots + a_{ii}h_i + \dots + a_{in}h_n \\ \dots \\ a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + a_{n3}h_3 + \dots + a_{ni}h_i + \dots + a_{nn}h_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Ah \cdot h &= (a_{11}h_1^2 + a_{12}h_1h_2 + a_{13}h_1h_3 + \dots + a_{1i}h_1h_i + \dots + a_{1n}h_1h_n) + \\ &\quad (a_{21}h_1h_2 + a_{22}h_2^2 + a_{23}h_2h_3 + \dots + a_{2i}h_2h_i + \dots + a_{2n}h_2h_n) \\ &\quad \dots \\ &\quad (a_{i1}h_1h_i + a_{i2}h_2h_i + a_{i3}h_3h_i + \dots + a_{ii}h_i^2 + \dots + a_{in}h_nh_i) + \\ &\quad \dots \\ &\quad (a_{n1}h_1h_n + a_{n2}h_2h_n + a_{n3}h_3h_n + \dots + a_{ni}h_ih_n + \dots + a_{nn}h_n^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} h_i h_j \right) = 2a_{1i}h_1 + 2a_{2i}h_2 + \dots + 2a_{ii}h_i + \dots + 2a_{ni}h_n$$

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} h_i h_j \right) = 2 \sum_{j=1}^n a_{j,i} h_j.$$

Da cui si deduce

$$\frac{\partial G}{\partial h_i} = \frac{2}{\|h\|^2} \left( \sum_{j=1}^n a_{j,i} h_j - \frac{Ah \cdot h}{\|h\|^2} h_i \right)$$

$$DG(h_{m1}) = 0 \iff Ah_{m1} - G(h_{m1})h_{m1} = 0$$

$$Dg(h_{M1}) = 0 \iff Ah_{M1} - G(h_{M1})h_{M1} = 0$$

ossia  $m_1 = G(h_{m_1})$  e  $M_1 = G(h_{M_1})$  autovalori per  $A$ . Inoltre sono il più piccolo e il più grande autovalore come segue facilmente.  $\square$