Analisi Matematica II Elettronica
a.a. 2021-2022

Prof.ssa Paola Loreti

Ricevimento via meet su richiesta via e-mail da uniroma1.it
Libro Lezioni di analisi matematica II
N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Zanichelli

Ricordiamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

La formula di Eulero è una formula nel campo dell'analisi complessa che connette le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale complessa. Per $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Sia e la base dei logaritmi naturali, i l'unitá immaginaria e seno e coseno le funzioni trigonometriche.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Sostituendo z con ix si ottiene, riordinando la serie (giustificato per la convergenza assoluta):

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

La formula di Eulero fornisce l'identità di Eulero, che mette in relazione tra loro e, i, π, 1 e 0:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Valgono

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix),$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(ix) = -i\sinh(ix).$$

Ricordiamo

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Osserviamo le diversità tra la funzione esponenziale ad esponente reale x e la funzione esponenziale ad esponente immaginario ix

- la funzione e^x assume valori reali, è strettamente crescente e quindi iniettiva, infinitesima per $x \to -\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.
- la funzione e^{ix} assume valori complessi, è limitata, è periodica, dunque non è iniettiva.

Consideriamo serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n-1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2p \\ 1, & n = 2p+1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$s_n = \frac{1-(-|x|)^n}{1+|x|} = \frac{1-(-1)^n|x|^n}{1+|x|}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1-|x|^{2p}}{1+|x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1+|x|^{2p-1}}{1+|x|}, & n = 2p-1 \end{cases}$$

Ne segue che $s_{2p} \to -\infty$ e $s_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & x \in (-1,1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots \quad$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso centrato in 0.
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n.
Osserviamo di aver incontrato le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie risulta indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza risulta un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la serie di potenze

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

E l'insieme di convergenza puntuale della serie, ossia
$E := \{x \in \mathbb{R} : S(x) \, converge \ \}$

$$E \neq \emptyset$$

$$r := \sup\{|x - x_0| : \ \ x \in E\},$$

In caso di serie centrata nell'origine, I E l'insieme dei punti x in cui la serie converge e

$$r = \sup E$$

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.
Proposizione. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 allora converge (assolutamente) in ogni punto x tale che $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione

Sappiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$.

Criterio di Cauchy
Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell,$$

allora

$$r = \frac{1}{\ell}$$

Criterio di D'Alembert
Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell,$$

allora

$$r = \frac{1}{\ell}.$$

Se $\ell = +\infty$ allora $r = 0$, se $\ell = 0$ allora $r = +\infty$

Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Ne segue $\ell = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale non possiamo dire nulla per $|x| = r$.
Ricapitolando
Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi

- la serie converge per $x = 0$
- la serie converge per ogni x reale
- la serie converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$

Esercizi di Analisi Matematica II
- Tutoraggio a cura di Antonio Agresti a.a. 2020-21 per Elettronica Comunicazioni docente Paola Loreti

Esercizio 1

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n} x^n.$$

Determinazione del raggio di convergenze r di una serie di potenze

Data la serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

- *Criterio di Cauchy (o della radice)*:
  Se
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell, \qquad (\text{anche } +\infty)$$
  allora $r = \frac{1}{\ell}$. Nel caso $\ell = \infty$, si ha $r = 0$.
- *Criterio di D'Alambert (o del rapporto)*:
  Se $a_n \neq 0$ per ogni n e
  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell, \qquad (\text{anche } +\infty)$$
  allora $r = \frac{1}{\ell}$. Nel caso $\ell = \infty$, si ha $r = 0$.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}}{(-1)^n \frac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = 1.$$

Dunque il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell} = 1$.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = \frac{e^n}{n^n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento Esercizio 1

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = \frac{e^n}{n^n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n} = 0.$$

Dunque il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell} = \infty$.

Esercizio 2

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(1-x)^n$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Converge in $0 < x < 2$;

b) Converge in $-1 < x < 1$;

c) Converge in $2 < x < 4$.

La risposta giusta è a).

La risposta giusta è a). La serie può essere studiata con i seguenti step:

1. Ponendo $y = 1 - x$ si ottiene la serie di potenze
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) y^n. \tag{1}$$
2. Ricordando il limite notevole
$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$
possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (1) con il criterio del rapporto:
$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{1}{n+1})}{(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$
Quindi $r = 1$.
3. Dallo step 2 abbiamo che (1) converge per $|y| < 1$. Quindi la serie originale converge per
$$\begin{aligned} |1 - x| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 1 - x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < -x < 0 \end{aligned}$$