ANALISI MATEMATICA
ING. CIVILE - ING. AMBIENTE e TERRITORIO
04/07/2024

Prof.ssa M. R. Lancia - Prof. E. Di Costanzo - Prof. A. Della Rocca

Testo A–Soluzioni

1) Trovare gli z complessi tali che

$$|z - 2i| \leq 3$$

e disegnare nel piano complesso il luogo geometrico descritto.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

Determinare il suo insieme di definizione, i suoi eventuali asintoti, l'insieme di continuitá, di derivabilitá e studiare la natura dei suoi eventuali punti di non derivabilitá.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(e^x - 1)e^x}{e^{2x} + 1} \dfrac{1}{2\sin(y)\cos(y)} \\ y(0) = \pi/4 \end{cases}$$

Tralasciare lo studio per stabilire se la soluzione sia globale o meno.

Soluzioni.
Insieme $I \times J = \mathbb{R} \times (0; \pi/2)$. Non vi sono soluzioni stazionarie.
Integrando per separazione di variabili:

$$2\int \sin(y)\cos(y)\,dy = \int \frac{(e^x-1)e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{(t-1)}{t^2+1}\,dt = \frac{\ln(e^{2x}+1)}{2} - \arctan(e^x) + c$$

$$\sin^2 y = \frac{\ln(e^{2x}+1)}{2} - \arctan(e^x) + c,$$

$$c = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$y(x) = \arcsin\sqrt{\frac{\ln(e^{2x}+1)}{2} - \arctan(e^x) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$$

Da considerazioni qualitative al variare di x si potrebbe dedurre che la soluzione è locale.

4) Dimostrare che una funzione derivabile è continua.

ANALISI MATEMATICA
ING. CIVILE - ING. AMBIENTE e TERRITORIO
06/06/2024

Prof.ssa M.R. Lancia - Prof. E. Di Costanzo - Prof. A. Della Rocca

Testo B

Cognome .... Nome ....

Matricola .... Anno di corso ....

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguiti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1) Trovare gli z complessi tali che

$$|z - 2 - 2i| \leq 3$$

e disegnare nel piano complesso il luogo geometrico descritto.

2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2 x}$$

Determinare il suo insieme di definizione, i suoi eventuali asintoti, l'insieme di continuitá, di derivabilitá e studiare la natura dei suoi eventuali punti di non derivabilitá.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{2\cos(y-1)\sin(y-1)} \dfrac{e^{2(x-1)} - e^{(x-1)}}{e^{2(x-1)} + 1} \\ y(1) = \pi/4 + 1 \end{cases}$$

Tralasciare lo studio per stabilire se la soluzione sia globale o meno.

Soluzioni.
Insieme $I \times J = \mathbb{R} \times (1; 1 + \pi/2)$. Non vi sono soluzioni stazionarie.
Integrando per separazione di variabili:

$$2\int \sin(y-1)\cos(y-1)\, dy = \int \frac{e^{2(x-1)} - e^{(x-1)}}{e^{2(x-1)} + 1}\, dx = \int \frac{(t-1)}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{\ln(e^{2(x-1)} + 1)}{2} - \arctan(e^{(x-1)}) + c$$

$$\sin^2(y-1) = \frac{\ln(e^{2(x-1)} + 1)}{2} - \arctan(e^{(x-1)}) + c,$$

$$c = -\frac{\ln(2e^2)}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$y(x) = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{\ln(e^{2(x-1)} + 1)}{2} - \arctan(e^{(x-1)}) - \frac{\ln(2e^2)}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$$

Da considerazioni qualitative al variare di x si potrebbe dedurre che la soluzione è locale.

4) Enunciare e dimostrare il teorema di Torricelli Barrow.