Rango di una matrice

Luca Sabatini

Si è visto che se una matrice quadrata ha una riga (o una colonna) combinazione lineare di altre, o analogamente se le righe (o le colonne) di una matrice quadrata sono tra loro linearmente dipendenti, allora il determinante dalla matrice è uguale a zero. Vale anche la proposizione inversa:

Proposizione 1 *Se il determinante di una matrice* $\mathbf{A}$ *è identicamente uguale a zero, allora le righe, o le colonne di* $\boldsymbol{A}$*, sono tra loro linearmente dipendenti.*

Prova: Cominciamo a provare la proposizione per una matrice 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

tale che $\det \mathbf{A} = 0$; allora $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, ovvero

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \tag{1}$$

Se $a_1 = 0$ (lo stesso discorso può essere ripetuto per qualsiasi altro elemento della matrice, basta scambiare righe, o colonne o entrambi), allora per la legge di annullamento del prodotto, o $a_2 = 0$, quindi la prima riga è identicamente nulla, o $b_1 = 0$, allora la prima colonna è identicamente nulla e quindi le due righe, o le colonne, sono fra loro linearmente dipendenti. Supponiamo quindi che tutti e quattro gli elementi della matrice siano diversi da 0; dividendo la (1) per $b_1 b_2$ si ottiene

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$$

ovvero $a_1 = kb_1$ e $a_2 = kb_2$ che esprime la proporzionalità, e quindi la dipendenza lineare, delle righe. Dividendo la (1) per $a_2 b_2$ si ottiene

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = h$$

ovvero $a_1 = ha_2$ e $b_1 = hb_2$ che esprime la proporzionalità, e quindi la dipendenza lineare, delle colonne.
Passiamo ad una matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

e supponiamo che nessuna riga o colonna sia identicamente nulla e che due righe o colonne non siano tra loro proporzionali, altrimenti l'asserto sarebbe ovvio. Supponiamo che la sottomattrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

abbia determinante diverso da zero, per il Teorema di Cramer ogni sistema lineare che ha $\mathbf{A}$ come matrice di sistema ha una ed una sola soluzione; siano h e k le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

dunque si ha

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ovvero $a_3 = a_1h + b_1k$ e $b_3 = a_2h + b_2k$; sostituendo le espressioni così trovate nella matrice si ottiene:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1h + b_1k \\ b_1 & b_2 & a_2h + b_2k \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante deve essere uguale a zero per ipotesi. Sottraendo dalla terza colonna la prima moltiplicata per h e la seconda moltiplicata per k si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 - c_1h - c_2k \end{pmatrix},$$

sviluppandone il determinante secondo la terza colonna si ottiene

$$(c_3 - c_1h - c_2k) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

ma essendo $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ necessariamente $c_3 - c_1h - c_2k = 0$ ovvero $c_3 = c_1h + c_2k$; sostietuendo nella matrice si ottiene

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1h + b_1k \\ b_1 & b_2 & a_2h + b_2k \\ c_1 & c_2 & c_1h + c_2k \end{pmatrix}$$

in cui la terza colonna è combinazione lineare delle prime due. Operando nella stessa maniera nel sistema (2) utilizzando come termini noti c_1 e c_2 si ottiene la dipendenza lineare delle righe.
Per una matrice generica $n \times n$ basta estrarre una sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ il cui determinante è diverso da zero ed operare nella stessa maniera. □

Possiamo provare adesso il seguente fondamentale

Teorema 1 *Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice $m \times n$ rettangolare sul campo reale $\mathbb{R}$, allora risultano uguali i seguenti numeri:*

r) *numero delle righe di A linearmente indipendenti,*

s) *numero di colonne di A linearmente indipendenti,*

d) *ordine massimo delle matrici quadrate non singolari estraibili dalla matrice A.*

Tale numero è detto rango *della matrice.*

Prova: Sia $\mathbf{B}$ una matrice quadrata non singolare estraibile da $\mathbf{A}$ di ordine d, le righe di $\mathbf{B}$ sono tra loro linearmente indipendenti ed in numero di d, quindi $d \leq r$; analogamente le colonne di $\mathbf{B}$ sono linearmente indipendenti, e quindi $s \leq d$. Siano adesso r righe indipendenti di $\mathbf{A}$, con esse si può costruire una matrice $\mathbf{C}$ da cui è possibile estrarre una sottomatrice quadrata non singolare di ordine r per cui $r \leq d$; lo stesso procedimento lo si può utilizzare per s colonne linearmente indipendenti di $\mathbf{A}$, per cui $s \leq d$. Confrontando tutte le disuguaglianze si ottiene

$$r = s = d$$

Tale numero è definito come *rango* della matrice $\mathbf{A}$. □

Si può dare quindi la seguente

Definizione 1 *si dice* rango *di una matrice:*

- *il numero massimo di righe linearmente indipendenti, o*
- *il numero massimo di colonne linearmente indipendenti o*
- *l'ordine massimo dei minori non nulli estraibili dalla matrice.*