

Programma del corso “Geometria 1” (9 CFU)
Sapienza-Università di Roma
Ingegneria Civile, Ambiente e Territorio
a.a. 2023/2024

Docente: Prof. Giovanni Cerulli Irelli



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

1 Spazi vettoriali:

- 1.1 Cenni su gruppi, campi, numeri complessi, teorema fondamentale dell'algebra.
- 1.2 Definizione di spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} ; Esempi (funzioni a valori in uno spazio vettoriale, \mathbb{K}^n , vettori geometrici del piano e dello spazio, polinomi, polinomi di grado minore o uguale ad n).
- 1.3 Combinazioni lineari.
- 1.4 Combinazioni convesse. Segmento. Triangoli e loro punti notevoli.
- 1.5 Sottospazi vettoriali, generatori, Span, Lemma di scambio.
- 1.6 Dipendenza ed indipendenza lineare.
- 1.7 Basi e dimensione, coordinate.
- 1.8 Intersezione e somma di sottospazi vettoriali; formula di Grassmann; somma diretta di sottospazi vettoriali.

2 Applicazioni lineari:

- 2.1 Definizione
- 2.2 Esempi: proiezione su un sottospazio vettoriale lungo un suo supplementare; la derivata di polinomi; la valutazione di un polinomio in un polinomio.
- 2.3 Composizioni e combinazioni lineari di funzioni lineari sono lineari.
- 2.4 Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare; teorema della dimensione; rango.
- 2.5 Funzione "coordinate in una base data".
- 2.6 Matrice associata ad un'applicazione lineare in due basi date; spazio delle colonne di una matrice.
- 2.7 Moltiplicazione righe per colonne di matrici.
- 2.8 Cambiamenti di base.
- 2.9 Algoritmo di eliminazione di Gauss; matrici a scala e a scala ridotta.
- 2.10 Inversa di una matrice quadrata; algoritmo di inversione.
- 2.11 Matrici elementari.
- 2.12 Spazio delle righe di una matrice. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi vettoriali.

3 Determinante

- 3.1 Esistenza ed unicità del determinante.
- 3.2 Sviluppi di Laplace.
- 3.3 Teorema di Binet.
- 3.4 Determinante 2×2 come area orientata.
- 3.5 Matrice aggiunta e formula di Cramer.

- 3.6 Teorema di Cayley-Hamilton.
- 3.7 Tecniche di calcolo per l'inversa (algoritmo di inversione, formula di Cramer, teorema di Cayley-Hamilton).

4 **Diagonalizzazione:**

- 4.1 Definizione ed interpretazione geometrica.
- 4.2 Autospazi; molteplicità geometrica ed algebrica di un autovalore.
- 4.3 Endomorfismi diagonalizzabili.
- 4.4 Teorema spettrale reale.
- 4.5 Forme quadratiche definite positive.
- 4.6 Classificazione affine e metrica delle coniche.

5 **Geometria affine del piano e dello spazio (Modulo)**

- 5.1 Sottospazi affini. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini.
- 5.2 Sottospazi affini di \mathbb{R}^2 e loro posizione reciproca. Fasci di rette.
- 5.3 Sottospazi affini di \mathbb{R}^3 e loro posizione reciproca. Fasci di rette e piani.

6 **Sistemi di equazioni lineari:**

- 6.1 Matrici associate ad un sistema lineare, Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare.
- 6.2 Teorema di Rouchè-Capelli.
- 6.3 Teorema degli orlati.
- 6.4 Formula di Cramer per la soluzione di un sistema lineare non-singolare.

7 **Spazi Euclidei**

- 7.1 Forme bilineari, matrice associata ad una forma bilineare in una base, cambiamento di base e matrici associate a forme bilineari, matrici congruenti.
- 7.2 Forme bilineari simmetriche: Ortogonale di un sottospazio, teorema di decomposizione ortogonale, basi ortogonali, esistenza di una base ortogonale.
- 7.3 Forme bilineari reali: teorema di Sylvester, segnatura di una forma bilineare, basi di Sylvester, due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.
- 7.4 Prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n .
- 7.5 Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n ; matrice di proiezione ortogonale; Algoritmo di Gram-Schmidt.
- 7.6 Insiemi/basi ortogonali, coefficienti di Fourier.
- 7.7 Distanza tra sottospazi affini.
- 7.8 Norma, distanza tra punti.

7.9 Angoli, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, Disuguaglianza triangolare, teorema di Pitagora.

8 Geometria euclidea del piano e dello spazio (Modulo)

8.1 Versori normali e direttori di una retta del piano e dello spazio; coseni direttori.

8.2 Distanza punto-retta nel piano.

8.3 Bisettrici di un angolo. Asse di un segmento.

8.4 Circonferenze del piano; equazioni parametriche delle circonferenze; retta tangente ad un punto di una circonferenza.

8.5 Isometrie del piano.

8.6 Distanza punto-retta, punto-piano, retta-retta nello spazio.

8.7 Triangoli: bisettrici, altezze, mediane, circocentro, ortocentro, incentro.

9 MATLAB:

9.1 Il corso da 2 ore Matlab-Onramp è richiesto all'esame orale.

9.2 Matrici simboliche.

9.3 Calcolo di una base del nucleo e dell'immagine di una matrice.

9.4 Calcolo della forma a scala ridotta di una matrice.

9.5 Risoluzione di sistemi lineari, anche con parametro.