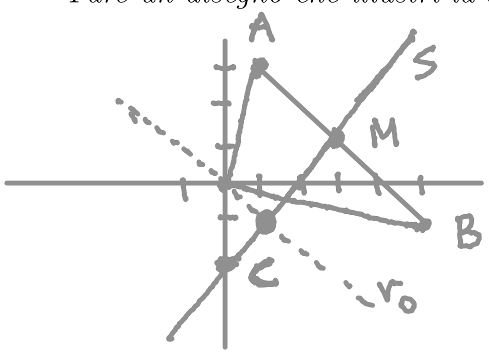
Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i punti* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo* T *di vertici* O, A *e* B.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza* m *della retta passante per* A *e* B.
3. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche dell'asse* s *del segmento* $\overline{AB}$.
4. *(1 punto) Trovare il punto* C *di* s *tale che il triangolo* ACB *abbia la stessa area del triangolo* T *ed inoltre* C *stia nel quarto quadrante.*
5. *(1 punto) Calcolare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* B *e passante per* A.
6. *(1 punto) Dare la definizione di coseno dell'angolo formato da due vettori non-nulli* X *e* Y.
7. *(1 punto) Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, ovvero che* $-||X||||Y|| \leq X \cdot Y \leq ||X||||Y||$ *per ogni* $X, Y \in \mathbb{R}^2$.

Fare un disegno che illustri la situazione.



1) $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} |\det(A|B)| = \frac{1}{2} \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right| = 8$

2) $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{-4}{4} = -1$

3) $s: x - y = 2$. $s = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4) $r_0 = \langle \overrightarrow{AB} \rangle : x + y = 0$. $C = r_0 \cap s = \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$. $C \overset{\text{Cramer}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Oppure:

Sia $P_t = \begin{pmatrix} 3+t \\ 1+t \end{pmatrix} \in s$. $\text{Area}(AP_tB) = \frac{1}{2} |\det(A - P_t | B - P_t)| = 4|t|$

$4|t| = 8 \Leftrightarrow t = \pm 2$. $P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C$.

5) $r = ||B - A|| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = 4\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = 4\sqrt{2}$.

$\mathcal{C}: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 32$. $\mathcal{C} = \left\{ B + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

6) $\cos\widehat{XY} = \dfrac{X \cdot Y}{||X||\,||Y||}$

7) Se X o Y è $O_{\mathbb{R}^2}$ allora $X \cdot Y = ||X||\,||Y|| = 0$. Altrimenti

$X \cdot Y = \cos\widehat{XY}\, ||X||\,||Y||$. Poiché $\cos\alpha \in [-1, 1]$,

$-||X||\,||Y|| \leq X \cdot Y \leq ||X||\,||Y||$.