Nome, Cognome e Matricola

Tutoraggio
Settimana 10

Giovedì 30 novembre, venerdì 1 dicembre e lunedì 4 dicembre 2023

Esercizio 1. *Usare la formula di Cramer per calcolare l'inversa delle seguenti matrici:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 2+i \\ 1+i & 4i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2i & i^{-1} \\ i^{-2} & 1+i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *Usare la formula di Cramer per trovare l'unica soluzione dei seguenti sistemi lineari non-singolari:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. *Siano* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

1. *Calcolare* $v_1 \wedge v_2$.
2. *Trovare equazioni cartesiane del piano* $\pi = P_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$.
3. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* v_1, v_2, P_0.

Esercizio 4. *Calcolare* $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$, *possibilmente senza fare conti. Dimostrare che il prodotto vettoriale* $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *è un'operazione bilineare, alternante ma non associativa.*

Esercizio 5.

1. *Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli* $v_1 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $v_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $v_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

   Stabilire se la base (v_1, v_2, v_3) *ha la stessa orientazione di* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

   sono sghembe. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 *e parallelo ad* r_1. *Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2.

Esercizio 6. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $L : V \to V$ un endomorfismo lineare. Trovare due basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ di V tali che la matrice che rappresenta L nelle basi $\mathcal{B}_1$ (in partenza) e $\mathcal{B}_2$ (in arrivo) è diagonale. Possiamo concludere che L è diagonalizzabile?*

Esercizio 7. *Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici evidenziandone le radici (ovvero scrivendoli come prodotto di polinomi di grado uno):*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8. *Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2 simmetrica. Calcolare gli autovalori di A e dimostrare che sono numeri reali. Dimostrare che se $a \neq d$ oppure $b \neq 0$ allora A ha due autovalori distinti.*

Esercizio 9. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $L : V \to V$ un endomorfismo lineare. Dimostrare che L è diagonalizzabile se e solo se per ogni base $\mathcal{B}$ di V la matrice che rappresenta L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo) è diagonalizzabile.*

Esercizio 10. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e sia $L : V \to V$ l'endomorfismo lineare*

$$L(p) = p'(x^2 + 1) - p'(x).$$

Stabilire se L è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una base di V composta di suoi autovettori. [Suggerimento: usare l'esercizio precedente.]

Esercizio 11. *In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i seguenti punti P ed C e la seguente retta r:*

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r : 3x + 2y = 6.$$

1. *Trovare il punto Q_1 ottenuto ruotando P di un angolo di $\pi/6$ in senso anti-orario attorno a C.*

2. *Trovare il punto Q_2 ottenuto ruotando il punto P di un angolo di $\pi/6$ in senso orario attorno a C.*

3. *Trovare il punto Q_3 ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto P attraverso la retta r.*

4. *Trovare il punto Q_4 tale che il triangolo di vertici P, C e Q_4 sia equilatero ed abbia ascissa positiva.*