Nome, Cognome e Matricola

Tutoraggio
Settimana 11
Diagonalizzazione e geometria dello spazio

Giovedì 7, venerdì 8 e lunedì 11 dicembre 2023

Esercizio 1. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A e v stabilire se v è un autovettore per A.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. *Calcolare il polinomio caratteristico di* $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Dedurre dal teorema di Cayley-Hamilton che A è un proiettore e trovare una sua base diagonalizzante.*

Esercizio 3. *Calcolare il polinomio caratteristico di* $A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 12 \\ -4 & 3 & -6 \\ -8 & 4 & -11 \end{pmatrix}$. *Dedurre dal teorema di Cayley-Hamilton che A è una radice quadrata dell'identità, ovvero $A^2 = \mathbf{1}_2$ e quindi A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 9 & -3 & -15 \\ -94 & 64 & -18 & -102 \\ 78 & -51 & 17 & 84 \\ -58 & 39 & -11 & -62 \end{pmatrix}.$$

1. *Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*
2. *Calcolare la prima colonna di A^{-1} utilizzando la formula di Cramer.*
3. *Dare una formula per trovare una matrice C tale che $C^2 = A$.*

Esercizio 6. *In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ si considerino $n = (1, 2, 3)^t$ e $P = (1, 2, -1)^t$.*

1. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π passante per P ed avente n come vettore normale.*
2. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta r ottenuta come intersezione di π con il piano $\sigma : x + y + z = 1$.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di P da r.*
4. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale di P sul piano σ.*

Esercizio 7. *Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = -1 \end{cases} \qquad e \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed r_2, senza cambiare la loro forma.*
2. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per r_2.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.*
4. *(2 punti) Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente r_2 e parallelo ad r_1.*
5. *(1 punto) Si consideri la seguente famiglia di rette parallele ad r_1 dipendente dal parametro reale k:*

$$r_1(k) : \begin{cases} x - y + 3z = k \\ 2x - 3y + 4z = k \end{cases}$$

Trovare tutti i valori di k per i quali $r_1(k) \subset \pi$.