Nome, Cognome e Matricola

Ricevimento
Settimana 10

Lunedì 27 novembre 2023

Esercizio 1. *1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Si consideri la seguente matrice complessa:*

$$C = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i & 1-i \\ 2i & -i & 2+2i \\ -2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}.$$

   (a) *Calcolare il determinante di B sviluppando lungo la seconda colonna;*

   (b) *Calcolare il determinante di B sviluppando lungo la terza riga.*

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. *Utilizzando il determinante dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$.*
2. *Calcolare l'inversa della matrice $B = (v_1|v_2|v_3|v_4)$ con l'algoritmo di inversione.*
3. *Utilizzando l'inversa di B calcolare le coordinate del vettore $w = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 3. *Studiare la posizione reciproca delle seguenti coppie di sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ (senza cambiare la loro forma):*

- 1. $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y + z = 1$;

  2. $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$, $\pi_2 : 2x + 3y - z = -1$;

  3. $r_1 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$; $r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$.

- *Trovare la forma parametrica e cartesiana dei seguenti sottospazi affini di* $\mathbb{R}^3$

  1. *il piano passante per i tre punti* $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (-2,3,4)^t$ *e* $P_3 = (2,2,3)^t$;
  2. *il piano passante per il punto* $P = (1,1,1)^t$ *e parallelo al piano di equazione* $x + y + z = 1$;
  3. *la retta che giace sia nel piano* $x + y + z = 2$ *che nel piano* $x + 2y + 3z = 2$.
  4. *il piano che contiene la retta* $\begin{cases} x + 2y - 1z = 2 \\ x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$ *ed il punto* $Q = (1,2,3)^t$.

- *Dimostrare che le due rette*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle; \quad r_2 : \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

  sono sghembe e trovare equazioni parametriche e cartesiane del piano passante per r_2 *e parallelo ad* r_1.

Esercizio 4. *Dimostrare la seguente affermazione, vista a lezione nel caso del piano e dello spazio: Siano* $U : AX = b$ *un sottospazio affine di* $\mathbf{R}^n$ *in forma cartesiana e sia* $W = Y_0 + \langle w_1, \cdots, w_h \rangle$ *un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^n$ *di dimensione h scritto in forma parametrica. Dimostrare che*

$$U \cap W \neq \emptyset \Longleftrightarrow rg((Aw_1|\cdots|Aw_h)) = rg((Aw_1|\cdots|Aw_h|b - AY_0))$$

Esercizio 5. 1. *Sia A una matrice* $n \times n$ *e sia* $d = det(A)$. *Conoscendo d, calcolare* $det(-A)$.

2. *Sia A una matrice $n \times n$, sia $d = det(A)$ e sis λ uno scalare. Conoscendo d, calcolare $det(\lambda A)$.*

3. *Sia $X \in \mathbb{K}^n$ un matrice colonna e $Y \in Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$ una matrice riga. Calcolare $det(XY)$.*

4. *Calcolare*
$$det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
al variare dei parametri x_1, x_2, x_3.

Esercizio 6. 1. *Dimostrare che il determinante della seguente matrice è zero, per qualunque valore dei parametri:*
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & h & i & \ell & m \\ n & o & p & q & r \end{pmatrix}$$

2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*
$$\begin{pmatrix} 13247 & 28469 \\ 13347 & 28569 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 246 & 1014 & -342 \\ 427 & 543 & 721 \\ 327 & 443 & 621 \end{pmatrix}.$$

3. *Sapendo che* 195, 247 *e* 403 *sono divisibili per* 13, *dimostrare che anche il determinante della matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ *è divisibile per* 13.

Esercizio 7.

1. *Usare il determinante per trovare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali i tre vettori*
$$\begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 2+t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3t \end{pmatrix}$$
formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2. *Sia* $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ *e siano* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. *Usando il determinante mostrare che i polinomi* $(x+\lambda_1)^2$, $(x+\lambda_2)^2$ *e* $(x+\lambda_3)^2$ *sono linearmente indipendenti se e solo se* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$.
[Suggerimento: usare la base $(x^2, x, 1)$*]*

Esercizio 8. *Siano* r *e* π *una retta ed un piano di* $\mathbb{R}^3$*, rispettivamente.*

1. *Supponiamo che* $r = X_0 + \langle v \rangle$ *e* $\pi : ax + by + cz = d$. *Sia* $A_\pi = (a, b, c)$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$A_\pi v$	$rg(A_\pi v \mid d - A_\pi X_0)$
$r \subset \pi$		
$r \| \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

2. *Supponiamo che* $r = X_0 + \langle v \rangle$ *e* $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(v\|w_1\|w_2)$	$rg(v\|w_1\|w_2\|X_0 - Y_0)$
$r \subset \pi$		
$r\|\|\pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

3. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ *e* $\pi = Y_0 + \langle w_1, w_2 \rangle$. *Poniamo* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det(A_r(w_1\|w_2))$	$rg(A_r(w_1\|w_2)\|\mathbf{b} - A_rY_0)$
$r \subset \pi$		
$r\|\|\pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		

4. *Supponiamo che* $r : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ *e* $\pi : \alpha x + \beta y + \gamma z = d$. *Siano* $A_r = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$ *e* $A_\pi = (\alpha, \beta, \gamma)$. *Riempire la seguente tabella con le condizioni di posizione reciproca e dare condizioni per trovare l'unico punto di intersezione* P_0 *nel caso vi sia:*

Posizione reciproca	$det \begin{pmatrix} A_r \\ \hline A_\pi \end{pmatrix}$	$rg \left(\begin{array}{c\|c} A_r & \mathbf{b} \\ \hline A_\pi & d \end{array} \right)$
$r \subset \pi$		
$r \|\| \pi$		
$r \cap \pi = \{P_0\}$		