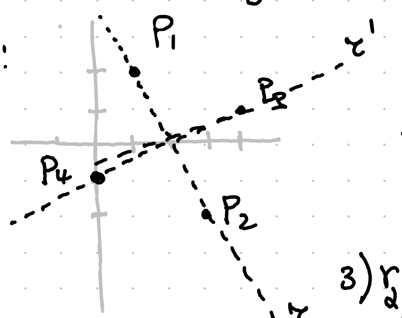
Es (Geometria del piano)

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Rappresentare i 4 p.ti sul piano cartesiano.
2) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2
3) Scrivere l'equazione del fascio di rette per P_3
4) Usare (3) per trovare eq. cartesiane della retta r' per P_4 e P_3.
5) Calcolare le pendente di r e r'
6) Dimostrare che il quadrilatero Q di vertici $P_1 P_2 P_3 P_4$ è un quadrato.
7) Calcolare $|Tg\,\alpha|$ dove α è l'angolo tra r e $s: x+2y=1$

Sol.:

1) 

2) $r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$

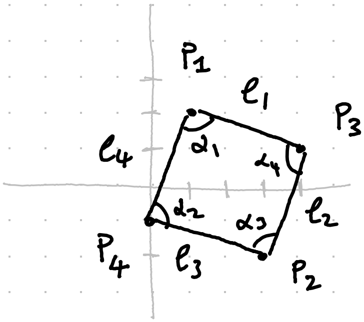
$r: \ 2x + y = 4$

3) $r_{\alpha,\beta}: \alpha(x-4) + \beta(y-1) = 0 \quad (\alpha,\beta) \neq (0,0)$

4) $P_4 \in r_{\alpha,\beta} \iff -4\alpha - 2\beta = 0 \iff \beta = -2\alpha$

$r' = r_{(1,-2)}: \ x - 4 - 2y + 2 = 0.$

5) $m = -2 \quad m' = \frac{1}{2}.$



È un quadrato se 1) lati uguali 2) angoli uguali.

$$\ell_1 = \|\overline{P_1P_3}\| = \|P_3 - P_1\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10}$$
$$\ell_2 = \|\overline{P_2P_3}\| = \|P_3 - P_2\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10}$$
$$\ell_3 = \|\overline{P_2P_4}\| = \|P_4 - P_2\| = \left\|\begin{pmatrix}-3\\+1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10}$$
$$\ell_4 = \|\overline{P_1P_4}\| = \|P_4 - P_1\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{10}.$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\overrightarrow{P_4P_1} \cdot \overrightarrow{P_4P_2} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$
$$\overrightarrow{P_2P_4} \cdot \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$$
$$\overrightarrow{P_3P_2} \cdot \overrightarrow{P_3P_1} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{2}.$$

7) pendenza $s = m' = -\frac{1}{2}$ pendenza di $z = m = -2$

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{|m - m'|}{|1 + mm'|} = \frac{|-2 + \frac{1}{2}|}{|1+1|} = \frac{|-\frac{3}{2}|}{2} = \frac{3}{4}.$$

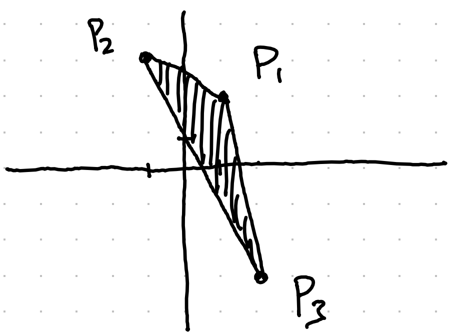
Es Calcolare l'area del triangolo T di vertici

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sol. :

$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \left| \det \left(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1 \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 10 - 1 \right| = \frac{9}{2}$$



Es: Consideriamo la funzione

$$T: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$

$$T(p(x)) = p(x+1)$$

1) Calcolare $T(1+x)$

2) Dimostrare che T è lineare.

NB: T si chiama la valutazione in $x+1$.

Es: Sia $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Dimostrare che la valutazione in $q(x)$ è

$$\mathrm{Val}_{q(x)} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
$$p \longmapsto p(q(x))$$

è lineare.

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

1) Calcolare $S_A\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) Calcolare una base di $\operatorname{Ker} S_A$.

3) Calcolare una base di $\operatorname{Im} S_A$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calcolare $S_A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

2) Calcolare una base di $\operatorname{Ker} S_A$

3) Calcolare una base di $\operatorname{Im} S_A$.

Es: Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ il seguente sottospazio vettoriale

$$U: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Trovare un supplementare W di U in $\mathbb{R}^4$.

2) Calcolare $pr_U^W\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Sol.:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Completiamo (u_1, u_2) ad una base di $\mathbb{R}^4$:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$W = \langle e_1, e_3 \rangle.$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^4 = U \oplus W.$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + y_1 e_1 + y_2 e_3$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + y_1 = 1 \\ x_1 = 1 \\ -3x_2 + y_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ y_1 = 1 - 4 = -3 \\ y_2 = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

$$pr_U^W\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$