Nome, Cognome e Matricola

Tutoraggio
Settimana 12
Prodotto scalare standard, proiezione ortogonale, algoritmo di Gram-Schmidt e diagonalizzazione ortogonale

Giovedì 14, venerdì 15 e lunedì 18 dicembre 2023

Esercizio 1. *Per ognuna delle seguenti coppie di vettori v e w e di numeri reali α e β, calcolare $v \cdot w$, $(\alpha v + \beta w) \cdot w$ e $v \cdot (\alpha v - 2\beta w)$:*

1. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

2. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

3. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\alpha = -3$, $\beta = 2$.

Esercizio 2. *Per ognuna delle seguenti matrici A calcolare equazioni parametriche e cartesiane di $Col(A)$ e di $Col(A)^{\perp}$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. *Usando il teorema di decomposizione ortogonale trovare equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi affini (degli opportuni spazi euclidei standard)*

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \rangle$

2. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \rangle$

3. $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \rangle$

4. $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\2\\3\\1\end{pmatrix} \rangle$

5. $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix} \rangle$

Esercizio 4. *Stabilire se le seguenti coppie di sottospazi affini sono ortogonali, nel senso che i loro sottospazi di giacitura sono ortogonali ovvero uno contenuto nell'ortogonale dell'altro.*

1. $r : 2x + 3y = 1$, $s : 3x - 2y = 2$.

2. $r = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \rangle$, $s : 4x - 2y = 3$.

3. $\pi = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} \rangle$, $r = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$.

4. $r = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \rangle$, $s = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$.

5. $\pi : 2x + 3y - z = 10$, $r = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \rangle$.

Esercizio 5. *Per ognuna delle seguenti matrici A e vettori b calcolare la matrice di proiezione ortogonale su Col(A), calcolare la proiezione ortogonale $c = pr_{Col(A)}(b)$ di b su Col(A) e poi risolvere il sistema $AX = c$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6. *Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$.

1. *Calcolare la matrice P_U di proiezione ortogonale su U.*

2. *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su $U^\perp$.*
   (suggerimento: usare il teorema di decomposizione ortogonale e la matrice identità).

3. *Calcolare equazioni cartesiane di U usando il teorema di decomposizione ortogonale.*

4. *Calcolare una base ortonormale di U.*

5. *Calcolare la proiezione ortogonale di w su U in due modi diversi: come $P_U w$ e con i coefficienti di Fourier.*

6. *Calcolare la distanza di w da U.*

Esercizio 7. *Siano U e W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ tali che $\mathbb{R}^n = U \oplus W$. Dimostrare che la funzione $pr_U^W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ovvero la proiezione su U lungo W) è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $W = U^\perp$.*

Esercizio 8. *Trovare una base ortogonale ed una base ortonormale di ognuno dei seguenti sottospazi vettoriali U dell'opportuno $\mathbb{R}^n$, poi calcolare la proiezione ortogonale su U del vettore dato v.*

1. $U : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ *in* $\mathbb{R}^3$. $v = (1, 1, 1)^t$.
2. $U : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ *in* $\mathbb{R}^4$. $v = (1, 1, 1, 1)^t$.
3. $U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ *in* $\mathbb{R}^3$. $v = (1, 2, 3)^t$.
4. $U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ *in* $\mathbb{R}^3$. $v = (1, -1, 1, 2)^t$.
5. $U : x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ *in* $\mathbb{R}^4$. $v = (1, 2, -1, -1)^t$.

Esercizio 9. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.*
2. *Trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^tAB = D$.*
3. *Calcolare l'inversa di A utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*