$\underline{Es}$ (Basi e coordinate)

1) Dimostrare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathbb{R}^2$ $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$.

Sol.:

Se $\mathcal{B}$ è una base allora $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

Se $ad - bc = 0$ allora

$$d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed anche

$$b \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ bc - ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\mathcal{B}$ è una base, $d = c = 0$ e $b = a = 0$ assurdo.

Viceversa se $ad - bc \neq 0$ allora $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se $\exists\, t$ t.c. $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

allora
$$\begin{aligned} ad - bc &= a(tc) - (ta)c \\ &= t(ac - ac) = 0 \quad \text{\Large ↯} \end{aligned}$$

2) Dimostrare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e calcolare

$$F_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad F_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \quad e \quad F_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

<u>Sol.</u>:

a) $2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ è una base.

oppure: $|\mathcal{B}| = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Basta far vedere che $\mathcal{B}$ genera:

$$\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 + t_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 3 = 1 \\ t_1 + t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 3 - t_1 = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$F_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F_\mathcal{B}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3) $V = \{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{22} = 0 \}$.
Dimostrare che è un s.sp. vett. di $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e calcolarne una base.

Sol.:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+d=0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Le tre matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono lin. ind. quindi formano una base di V.

Es (Completamento in $\mathbb{R}^n$).

Completare $Z = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Sol.: Z è lin. ind.

$W = \langle Z \rangle = Col(A)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$(A \mid e_1 e_2 e_3 e_4) =$

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

le colonne dominanti sono $1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow (A^1, A^2, e_1, e_2)$ sono lin. ind.

$\Rightarrow$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

Algoritmo del completamento in $\mathbb{R}^n$

Sia $\mathcal{Z} = (v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$ lin. ind.

Per completare $\mathcal{Z}$ ad una base di $\mathbb{R}^n$ basta aggiungere elementi della base canonica.

Per stabilire quali:

$$T \quad (v_1 | \dots | v_k | e_1 | e_2 | \dots | e_n) \rightsquigarrow \text{ a scala}$$

le colonne dominanti danno la risposta.

<u>Es</u>: Completare $\left(\overset{v_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}}, \overset{v_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right)$ ad una base di $\mathbb{R}^3$.

<u>Sol.</u>: osserviamo che sono lin. ind.:

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} t_1 + 2t_2 = 0 \\ 2t_1 + t_2 = 0 \\ 2t_1 + t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1 = -2t_2 \\ t_2 = -2t_1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} t_1 = -2t_2 \\ t_2 = -2(-2t_2) = 4t_2 \end{array} \iff \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

(v_1, v_2, e_2) è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\underline{\text{Es}}$ (Intersezione tra sottosp. vett. di $\mathbb{R}^n$)

$$U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$W = \langle w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Calcolare $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W, \mathcal{B}_{U\cap W}$ e $\mathcal{B}_{U+W}$.

$\underline{\text{Sol}}$.:

$U = \mathrm{Col}\, A \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -18 \\ 0 & 5 & -15 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \mathcal{B}_U = (u_1, u_2).$

$U \cap W = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid \exists\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} : x_1 u_1 + x_2 u_2 = y_1 w_1 + y_2 w_2 \}$

Poniamo $B = (w_1 | w_2)$ cosicché $W = \mathrm{Col}(B)$.

Allora possiamo scrivere $U \cap W$ dentro W come

$U \cap W = \{ y_1 w_1 + y_2 w_2 \mid \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 u_1 + x_2 u_2 - y_1 w_1 - y_2 w_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \}$

$= \{ y_1 w_1 + y_2 w_2 \mid \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ è soluzione

del sistema omogeneo associato a $(A | -B) \}$

$$(A|-B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \vdots \; y_2 = 0.$$

Quindi

$$U \cap W = \{ y_1 w_1 + y_2 w_2 \mid y_2 = 0 \} = \langle w_1 \rangle.$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{U \cap W} = (w_1).$$

Poiché $w_1 \notin \langle u_1 \rangle$ e $w_1 \in \langle u_2 \rangle$, per il lemma di scambio otteniamo

$$\mathcal{B}_U = (w_1, u_2).$$

Dalla dimostrazione della formula di Grassmann

$$\mathcal{B}_{U+W} = (w_1, u_2, w_2).$$

In generale, dati

$$U = \langle u_1, \dots, u_h \rangle \subset \mathbb{R}^n$$
$$W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle \subset \mathbb{R}^n$$

$\dim U = h$, $\dim W = k$.

Scegliendo $h \geq k$ per trovare $\mathcal{B}_{U \cap W}$:

$$\left(u_1 | \dots | u_h | -w_1 | \dots | -w_k \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline O & R \end{array} \right)$$

$U \cap W = \left\{ y_1 w_1 + \dots + y_k w_k \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \text{ è soluzione del sistema omogeneo associato a } R \right\}$

$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ y_1 w_1 + \dots + y_k w_k \;\middle|\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} \text{ è soluzione-base del sistema omogeneo a scala ridotta associato a } R \right\}$

Es:

$$U = \left\langle \underset{u_1=}{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\3\end{pmatrix}}, \underset{u_2=}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}}, \underset{u_3=}{\begin{pmatrix}4\\5\\1\\1\end{pmatrix}} \right\rangle \qquad W = \left\langle \underset{w_1=}{\begin{pmatrix}0\\3\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{w_2=}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}} \right\rangle$$

Trovare $\mathcal{B}_{U\cap W}$ e $\mathcal{B}_{U+W}$.

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & -1 & -3 \\ 0 & -8 & -11 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 5 & 9 & -1 & -3 \\ 0 & -8 & -11 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & -4/3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 7/3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 7/3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 16/3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{\frac{8}{15}} \end{array}\right)_R$$

$$\Rightarrow U\cap W = \left\{ t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 \;\middle|\; 52\, t_1 + 48/3\, t_2 + 226/3\, t_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 \;\middle|\; t_1 + \frac{8}{15} t_2 + \frac{13}{15} t_3 = 0 \right\}$$

$$\begin{array}{r} 75\,- \\ 39 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$= \left\langle -8 \begin{pmatrix}0\\3\\1\\1\end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, -13 \begin{pmatrix}0\\3\\1\\1\end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix}2\\5\\3\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}15\\-9\\7\\-38\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}30\\36\\32\\-13\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U \cap W = \left\{ y_1 w_1 + y_2 w_2 \mid y_1 + \frac{8}{15} y_2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ y_1 w_1 + y_2 w_2 \mid y_1 = -\frac{8}{15} y_2 \right\}$$

$$= \left\{ y_2 \left(-\frac{8}{15} w_1 + w_2 \right) \mid y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y_2 \left(-8 w_1 + 15 w_2 \right) \mid y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \langle -8 w_1 + 15 w_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 7 \\ -38 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dalla riduzione a scala deduciamo che (u_1, u_2, u_3) è una base di U.

Per trovare le coordinate di $-8w_1 + 15w_2$ in questa base di U, riprendiamo la riduzione a scala (in cui $y_1 = -8$ e $y_2 = 15$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -15 \\ 0 & 1 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -43 \\ 0 & 1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

Quindi

$$-8w_1 + 15w_2 = 3u_1 + 20u_2 - 7u_3$$

Da cui deduciamo, per il lemma di scambio

$$\mathcal{B}_U = (-8w_1 + 15w_2,\ u_2,\ u_3)$$

$$\mathcal{B}_W = (-8w_1 + 15w_2,\ w_2)$$

$$\mathcal{B}_{U\cap W} = (-8w_1 + 15w_2)$$

Dalla dimostrazione della formula di Grassmann:

$$\mathcal{B}_{U+W} = (-8w_1 + 15w_2,\ u_2,\ u_3,\ w_2).$$