Osservazione. Il punto medio M di un segmento $\overline{AB}$ è $\frac{A+B}{2}$. Infatti M è t.c. $AM = MB$ e quindi
$M - A = B - M \iff 2M = A+B \iff M = \frac{A+B}{2}$

es. 1. Siano $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.
Consideriamo la funzione $F: V \to W$ data da
$$F(p(x)) = p(x^2+1) - p(x-1).$$

1. Dimostrare che F è lineare.
$F = Val_{x^2+1} - Val_{x-1}$. La valutazione di un polinomio in un altro polinomio è lineare. Inoltre, una combinazione lineare di funzioni lineari è lineare. Dunque F è lineare.

2. Calcolare $F(x^2+x+1)$.
$F(x^2+x+1) = (x^2+x+1)_{|x^2+1} - (x^2+x+1)_{|x-1} =$
$= (x^2+1)^2 + (x^2+1) + 1 - [(x-1)^2 + (x-1) + 1] =$
$= x^4 + 1 + 2x^2 + \cancel{x^2} + 1 + 1 - \cancel{x^2} - 1 + 2x - x \cancel{+1} \cancel{-1} =$
$= x^4 + 2x^2 + x + 2.$

3. Scrivere la matrice A associata a F nelle basi standard.
$C_V = (1, x, x^2)$
$C_W = (1, x, x^2, x^3, x^4)$

$A^1 = F(1)_{C_W} = 1_{|x^2+1} - 1_{|x-1} =$
$= 1 - 1 = 0 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}_{C_W}$

$A^2 = F(x)_{C_W} = x_{|x^2+1} - x_{|x-1} =$
$= (x^2+1) - (x-1) =$
$= x^2 + 1 - x + 1 = x^2 - x + 2 =$
$= \begin{pmatrix} 2\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}_{C_W}$

$A^3 = F(x^2)_{C_W} = x^2_{|x^2+1} - x^2_{|x-1} =$
$= (x^2+1)^2 - (x-1)^2 =$
$= x^4 + 2x^2 \cancel{+1} - x^2 \cancel{-1} + 2x =$
$= x^4 + x^2 + 2x = \begin{pmatrix} 0\\2\\1\\0\\1 \end{pmatrix}_{C_W}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcolare le basi di nucleo e immagine di F.
$Im A = \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\2\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow Im F = \left\langle F^{-1}_{C_W}\begin{pmatrix} 2\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, F^{-1}_{C_W}\begin{pmatrix} 0\\2\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$
$\uparrow$
A è già a scala $= \langle x^2 - x + 2, x^4 + x^2 + 2x \rangle$

$\dim Ker A + \overbrace{\dim Im A}^{=2} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$
$(S_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5)$ $\quad \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\0 \end{pmatrix} = A^1 = S_A(e_1)$
$\to \dim Ker A = 1$ $\quad \iff e_1 \in Ker S_A = Ker A$
$e_1 \in Ker A$ (poiché $A^1 = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\0 \end{pmatrix}$)
$\Rightarrow Ker A = \langle e_1 \rangle \Rightarrow Ker F = \langle F^{-1}_{C_V}(e_1) \rangle =$
$= \langle 1 \rangle$

es. 2 In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ si considerino le rette:
$r: \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$

1. Stabilire la posizione reciproca di r ed s senza cambiare la loro forma.
$r: Ax = b$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$b = \begin{pmatrix} 1\\2 \end{pmatrix}$

$s = X_0 + \langle v \rangle$ dove $X_0 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$
$v = \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}$

r e s sono $// \iff s_0 = \langle v \rangle \subset r_0 = Ker A$
$\iff Av = 0$
$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\2 \end{pmatrix} \neq 0$
$\Rightarrow r$ e s non sono parallele

$r \cap s \neq \emptyset \iff b - AX_0 \in \langle Av \rangle \iff rg(Av \mid b - AX_0) = 1$
$\Updownarrow$
r e s sono incidenti

$b - AX_0 = \begin{pmatrix} 1\\2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1\\2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\\2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\\0 \end{pmatrix}$

$rg\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$
$\Rightarrow r$ e s sono sghembe

2. Trovare equazioni parametriche per r.
Risolviamo il sistema:
$r: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$
$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$
$r = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}}_{Y_0} + \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}}_{w} \right\rangle = Y_0 + \langle w \rangle.$
$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
$r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$
$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 + 1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1\\-1\\1 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

3. Trovare equazioni cartesiane per s.
$s = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}}_{= X_0} + \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad X = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{pmatrix} \in s \iff X - X_0 \in \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$
$rg\begin{pmatrix} 2 & x_1 - 1 \\ -1 & x_2 - 1 \\ 1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} = 1$
$\parallel$
$rg\begin{pmatrix} 1 & x_3 - 1 \\ -1 & x_2 - 1 \\ 2 & x_1 - 1 \end{pmatrix}$
$\parallel$
$rg\begin{pmatrix} 1 & x_3 - 1 \\ 0 & \boxed{x_2 + x_3 - 2} \\ 0 & \boxed{x_1 - 2x_3 + 1} \end{pmatrix} = 1 \iff s: \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

Altro metodo:
$C \quad s_0 = Ker C$
$CX = CX_0$
$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
$CX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 2\\-1 \end{pmatrix}$
$CX = CX_0$
$: \begin{cases} y + z = 2 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$

4. Calcolare la distanza tra r ed s.
$d(r,s) = \frac{|(Y_0 - X_0) \cdot v \wedge w|}{\|v \wedge w\|} =$
$\uparrow$
r e s sono sghembe
$= \frac{|\det(v, w, Y_0 - X_0)|}{\|v \wedge w\|}$
$Y_0 - X_0 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\-1\\-1 \end{pmatrix}$

$\det(v, w, Y_0 - X_0) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$
$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} =$
$= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$

$v \wedge w = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -2 + 1 = -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}$

$d(r,s) = \frac{|-2|}{\left\|\begin{pmatrix} 0\\1\\-1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

5. Calcolare la matrice P_{s_0} di proiezione ortogonale sul sottospazio di giacitura s_0 di s.
$s_0 = \langle v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad A = \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}$

$P_{s_0} = A(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}\left((2\ {-1}\ 1)\begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}\right)^{-1}(2\ {-1}\ 1)$
$= \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}\frac{1}{6}(2\ {-1}\ 1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Calcolare la distanza del punto $Q = \begin{pmatrix} 7\\7\\7 \end{pmatrix}$ da s.
DISTANZA DI UN PTO DA UN SOTTOSP. AFFINE
$P \quad U = X_0 + U_0 \quad d(P, U) = \|(P - X_0) - pr_{U_0}(P - X_0)\|$

$d(Q, s) = \|(Q - X_0) - pr_{s_0}(Q - X_0)\| =$
$= \left\|\begin{pmatrix} 6\\6\\6 \end{pmatrix} - P_{s_0}\left(\begin{pmatrix} 6\\6\\6 \end{pmatrix}\right)\right\| =$
$= \left\|\begin{pmatrix} 6\\6\\6 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\\6\\6 \end{pmatrix}\right\| =$
$= \left\|\begin{pmatrix} 6\\6\\6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}\right\| =$
$= \left\|\begin{pmatrix} 6\\6\\6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4\\-2\\2 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 2\\8\\4 \end{pmatrix}\right\| = 2\left\|\begin{pmatrix} 1\\4\\2 \end{pmatrix}\right\| =$
$= 2\sqrt{1+16+4} = 2\sqrt{21}.$

es. 3 Consideriamo le seguenti matrici.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Trovare una base B_A di $Col(A)$ e una base B_C di $Col(C)$.
$\to \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$
$\Rightarrow rgA \geq 2$
$rgA = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\left.\begin{array}{l} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rgA = 2$

Dato che il minore $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ è $\neq 0$, le prime due colonne di A sono lin. indip. $\Rightarrow Col(A) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\2\\1\\2 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2\\1\\2\\1 \end{pmatrix}}_{v_2} \right\rangle.$
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \overset{1 \neq 0}{\to} rgC = 2$ e
$Col(C) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\3\\2\\-1 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0\\1\\2\\3 \end{pmatrix}}_{v_4} \right\rangle$

2. Dimostrare che A, C, I sono simili.
A, C, I hanno lo stesso rango (e la stessa forma) $\Rightarrow A, C, I$ sono simili

3. Dimostrare che $B_2 = B_A \cup B_C \overset{= (v_1, v_2, v_3, v_4)}{}$ è una base di $\mathbb{R}^4$
B_2 è formata da $4 = \dim \mathbb{R}^4$ vettori. Dunque, per dimostrare che B_2 è una base di $\mathbb{R}_4$, basta dimostrare che i vettori che la compongono sono lin. indip.

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} =$
$\det\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$
$-3(2+8) \neq 0 \Rightarrow B_2$ è una base di $\mathbb{R}^4$.

4. Trovare la matrice C' che rappresenta S_C nella base canonica in partenza e nella base B_2 in arrivo.
$(C')^1 = S_C(e_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}_{B_2}$
$(C')^2 = S_C(e_2)_{B_2} = F_{B_2}\begin{pmatrix} 1\\3\\2\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}_{B_2}$
$(C')^3 = S_C(e_3)_{B_2} = F_{B_2}\begin{pmatrix} 0\\1\\2\\3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}_{B_2}$

$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Trovare una base B_1^A di $\mathbb{R}^3$ e una base B_2^A di $\mathbb{R}^4$ t.c. la matrice che rappresenta S_A in queste basi sia la matrice I.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "F_{B_1^A}"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "F_{B_2^A}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "I"'] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_1^A = (b_1, b_2, \underbrace{b_3}_{})$ $\quad B_2^A = (c_1, c_2, c_3, c_4)$
$\uparrow$
deve essere una base del $Ker A$ poiché I^3 è la colonna nulla (Ricordiamo che $\dim Ker A = 1$)

$Ker A = Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$= Ker\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} =$
$= \left\langle \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to$ Prendiamo per esempio $b_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$
Completiamolo a una base di $\mathbb{R}^3$ con le proprietà richieste:
$B_2^A = B_2 \qquad I^1 = e_1 \iff c_1 = A^1 \overset{= S_A(e_1)}{=} v_1$
$I^2 = e_2 \iff c_2 = A^2 = v_2$
$\quad \parallel S_A(e_2)$

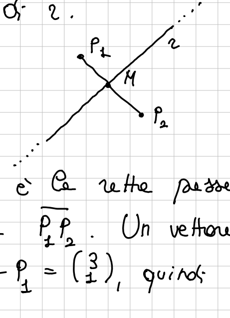
$B_1^A = (e_1, e_2, b_3)$
È una base di $\mathbb{R}^3$ poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ ed è la base cercata poiché
$F_{B_2^A} S_A(e_1) = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}_{B_2^A = B_2}$
$F_{B_2^A} S_A(e_2) = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}_{B_2}$
$F_{B_2^A} S_A(b_3) = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}_{B_2}$

quindi la matrice associata a S_A rispetto a queste basi è proprio I.

es. 4 In $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ consideriamo i due punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1\\2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 4\\3 \end{pmatrix}$.

1. Sia M il punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$. Calcolare M.
$M = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1\\2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\\3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 5\\5 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

2. Sia r l'asse del segmento $\overline{P_1P_2}$. Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di r.



r è la retta passante per M e ortogonale a $\overline{P_1P_2}$. Un vettore parallelo a $\overline{P_1P_2}$ è $P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 3\\1 \end{pmatrix}$, quindi $r = M + \left\langle \begin{pmatrix} 1\\-3 \end{pmatrix} \right\rangle$
$\uparrow$
Un vettore ortogonale a $\begin{pmatrix} 3\\1 \end{pmatrix}$

La retta ortogonale a $\begin{pmatrix} 3\\1 \end{pmatrix}$ e passante per M (iperpiano di $\mathbb{R}^2$ ortogonale a un vettore dato e passante per un punto) è
$\begin{pmatrix} 3\\1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\\y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\1 \end{pmatrix} \cdot M$
$\Updownarrow$
$3x + y = \begin{pmatrix} 3\\1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10$
$\Updownarrow$
$3x + y = 10$

3. Trovare un punto P_3 dell'asse r che abbia coordinate intere positive e t.c. il triangolo $T = P_1P_2P_3$ abbia area uguale a $\frac{15}{2}$.
$P_3 \in r \iff P_3 = \begin{pmatrix} x \\ 10 - 3x \end{pmatrix} \quad r: 3x + y = 10$
$Area(T) = \frac{1}{2}|\underbrace{\det(P_3 - P_1 \mid P_2 - P_1)}| = \begin{cases} -\frac{1}{2}(10x - 25) & ① \\ \frac{1}{2}(10x - 25) & ② \end{cases}$
$\parallel$
$\det\begin{pmatrix} x - 1 & 3 \\ 8 - 3x & 1 \end{pmatrix} = 10x - 25$

① : $-\frac{1}{2}(10x - 25) = \frac{15}{2} \iff -10x + 25 = 15$
$\iff 10x = 10 \iff x = 1$
$P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\7 \end{pmatrix}$ ha coordinate intere positive $\Rightarrow$ è il punto cercato

② : $P_3 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ Non è il punto richiesto poiché non ha coordinate intere positive.

Lemma di scambio
V sp. vett. di dim n con base $(v_1, \ldots, v_n)$
$(v_1, \ldots, v_{i-1}, \overline{v_i}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ con
$\overline{v_i} = l_1v_1 + \cdots + l_{i-1}v_{i-1} + l_iv_i + l_{i+1}v_{i+1} + \cdots + l_nv_n$
e $\boxed{l_i \neq 0}$
è ancora una base di V
es. $V = \mathbb{R}^3$
$V = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle \underbrace{e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3}_{} \rangle$
è ancora una base di V poiché ho sostituito nella base (e_1, e_2, e_3) di partenza a e_1 il vettore $e_1 + e_2 + e_3$ in cui e_1 compare con coeff. $1 \neq 0$