Spazi Euclidei

Geometria euclidea = misurare distanze e angoli tra s.sp. affini.

Serve un "metro":

Per algebrizzare il concetto di metro, introdurremo una f.ne di due variabili vettoriali che si chiama prodotto scalare.

Programma:

1) Lo spazio euclideo standard $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

2) (V, s) : spazio euclideo.

sp. vett. qualunque

prodotto scalare

Lo spazio euclideo standard

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

Def: Il prodotto scalare standard o prodotto puntino ("Dot-product") su $\mathbb{R}^n$ è la funzione

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita come

$$X \cdot Y := X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

NB: $X \cdot Y$ si legge "X scalar Y" oppure "X puntino Y". Non si legge "X per Y".

Es:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 + 8 = 11$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 - 6 + 5 = -3$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 1 + 6 = 7$$

Proprietà:

1) $\cdot$ è <u>simmetrica</u>, i.e. $X \cdot Y = Y \cdot X$

Infatti,

$$X \cdot Y = X^t Y = (X^t Y)^t = Y^t (X^t)^t = Y^t X = Y \cdot X$$

2) $\cdot$ è bilineare. Infatti,

$$(\alpha X + \beta X') \cdot Y = (\alpha X + \beta X')^t Y$$

$$= (\alpha X^t + \beta (X')^t) Y$$

$$= \alpha X^t Y + \beta (X')^t Y = \alpha X \cdot Y + \beta X' \cdot Y$$

Quindi $\cdot$ è lineare nella prima variabile. Poiché è simmetrico, è lineare anche nella seconda.

3) $\cdot$ è <u>non-degenere</u>, i.e.

$$X \cdot Y = 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Infatti se $X \cdot Y = 0$ $\forall Y$ in particolare, $X \cdot X = 0$. Ma allora,

$$0 = X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \overset{\text{su } \mathbb{R}}{\Rightarrow} x_1 = \dots = x_n = 0.$$

NB: su $\mathbb{C}^n$ questo non varrebbe:

$$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = 1+i^2 = 1-1 = 0.$$

4) $\cdot$ è definita positiva, i.e.

$\forall X \neq 0_{\mathbb{R}^n}, \quad X\cdot X > 0$

$$X\cdot X = x_1^2+\dots+x_n^2 > 0.$$

La norma (euclidea standard)

Def: La norma di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è la funzione

$$\|\ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definito come

$$\|X\| = \sqrt{X\cdot X} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$$

Es: $\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\left\|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+0^2} = \underline{1}$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\| e_i \| = 1 \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Proprietà:

- $\|X\| \geq 0 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n,$

  $\|X\| = 0 \iff X = 0_{\mathbb{R}^n}.$

- $\|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n.$

Infatti,

$$\|\lambda X\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

$$= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$= |\lambda| \, \|X\|.$$

<u>Def</u>: Un <u>versore</u> di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ di norma 1, i.e. $X \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\|X\| = 1$.

<u>Es</u>: $X \in \mathbb{R}^2$ $\|X\|=1$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|X\|^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x_1^2 + x_2^2 = 1.}$$

<u>Prop.</u>: I versori di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ sono

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta \in [0, 2\pi) \right\}$$

<u>dim</u>:

$x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1 \in [-1,1] = \operatorname{Im} \cos$

$\exists\, \vartheta$ t.c. $x_1 = \cos\vartheta$.

$\Rightarrow x_2^2 = 1 - x_1^2 = 1 - \cos^2\vartheta \Rightarrow$

$x_2 = \sin\vartheta$. $\blacksquare$

<u>Notazione</u>: $P_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$

$\cdot)$ $P_\theta = P_{\theta+2k\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

$\cdot)$ $-P_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi) \\ \sin(\theta+\pi) \end{pmatrix} = P_{\theta+\pi}.$

$\cdot)$ $P_\theta \cdot P_\mu = 0 \iff \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\mu \\ \sin\mu \end{pmatrix} = 0$

$\iff \cos\theta\cos\mu + \sin\theta\sin\mu = 0$

$\iff \cos\theta\,(\cos(-\mu)) - \sin\theta\,\sin(-\mu) = 0$

$\iff \cos(\theta-\mu) = 0$

$\iff \theta - \mu \in k\frac{\pi}{2}$

$P_\theta \cdot P_{\theta+\frac{\pi}{2}} = 0 = P_\theta \cdot P_{\theta-\frac{\pi}{2}}.$

$\cdot)$ $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ (come spazi vettoriali)

$a+ib \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = P_\theta$

$e^{i\theta}e^{i\mu} = e^{i(\theta+\mu)} = \cos(\theta+\mu) + i\sin(\theta+\mu)$

$P_{\theta+\mu} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\mu - \sin\theta\sin\mu \\ \sin\theta\cos\mu + \cos\theta\sin\mu \end{pmatrix}.$

Oss: Se $X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, allora
$$\frac{X}{\|X\|}$$ è un versore.

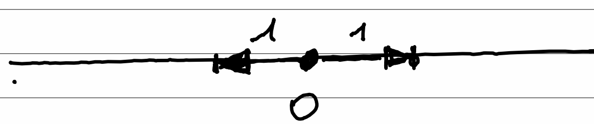
Infatti,
$$\left\| \frac{X}{\|X\|} \right\| = \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1.$$

Es: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \|X\| = \sqrt{5}$

$$\frac{X}{\|X\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$ è un versore.

Def: Un versore direttore di una retta è un vettore direttore di norma 1.

Ogni retta ha esattamente due versori direttori



I versori direttori di una retta

$$r: \ ax+by=c$$

di $\mathbb{R}^2$ sono

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix} \quad e \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix}b\\ -a\end{pmatrix}.$$

Es: I versori direttori di

$$2x+3y=1$$

sono

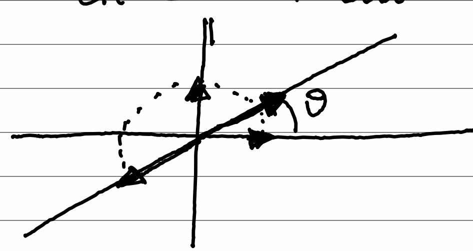
coseni direttori

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix} \quad e \quad \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}.$$

I <u>coseni direttori</u> di una retta

$$r: \ ax+by=1$$

sono le coordinate del versore direttore $\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$ di r in cui $\cos\vartheta \geq 0$.



$$\cos\vartheta = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq 0$$

$$\sin\vartheta = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La distanza in $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

<u>Def</u>: La <u>distanza</u> in $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ tra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ è il numero

$$\mathrm{dist}(X,Y) := \|X-Y\|$$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$$

<u>Es</u>: ·) $\mathrm{dist}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right\|$

$$= 2\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\| = 2\sqrt{2}$$

·) $\mathrm{dist}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+4+25}$

$$= \sqrt{30}$$

<u>Proprietà</u>: ·) $\mathrm{dist}(X,Y) \geq 0$

·) $\mathrm{dist}(X,Y) = 0 \iff X = Y$

·) $\mathrm{dist}(X+Z, Y+Z) = \mathrm{dist}(X,Y) \quad \forall X,Y,Z.$

(La distanza è invariante per traslazioni).

Angoli

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).
Dati $X, Y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$-\|X\| \|Y\| \leq X \cdot Y \leq \|X\| \|Y\|$$

dim:
Osserviamo che $\|\alpha X + \beta Y\|^2 \geq 0$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quindi

$$0 \leq \|\alpha X + \beta Y\|^2 = (\alpha X + \beta Y) \cdot (\alpha X + \beta Y)$$

$$= \alpha^2 X \cdot X + 2 \alpha \beta X \cdot Y + \beta^2 Y \cdot Y$$

Scegliamo $\alpha = \|Y\|^2$ e $\beta = - X \cdot Y$.
e otteniamo

$$0 \leq \|Y\|^4 \|X\|^2 - 2 \|Y\|^2 (X \cdot Y)^2 + (X \cdot Y)^2 \|Y\|^2$$

$$= \|Y\|^4 \|X\|^2 - (X \cdot Y)^2 \|Y\|^2$$

$$= \|Y\|^2 \left(\|Y\|^2 \|X\|^2 - (X \cdot Y)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \quad (X \cdot Y)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2$$

Estraendo la radice,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \, \|Y\|.$$

$\boxtimes$

<u>COR</u>: Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$$-1 \leq \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|} \leq 1$$

<u>Def</u>: Il <u>coseno dell'angolo</u> formato da due vettori non-nulli $X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ come

$$\cos \widehat{XY} := \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}$$

<u>Es</u>: $\cos \widehat{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| \, \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

ortogonalità

Def: Due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali (rispetto $\cdot$) se

$$X \cdot Y = 0$$

Notazione: $X \perp Y$ se $X \cdot Y = 0$.

OSS: $X \perp Y \iff \cos \widehat{XY} = 0$

(se X e Y sono $\neq 0_{\mathbb{R}^n}$).

Es: $0_{\mathbb{R}^n}$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ ed è l'unico con questa proprietà.

OSS: $\cdot$ $X \perp Y \Rightarrow Y \perp X$.

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$$

Insiemi e basi ortogonali

Un insieme $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ di vettori non-nulli si dice un insieme ortogonale se

$$X_i \cdot X_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

ovvero se i suoi elementi sono a due a due ortogonali.

Prop.: Un insieme ortogonale è lin. indipendente.

dim: Sia $(X_1, \dots, X_k)$ un insieme ortogonale. Se

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathbb{R}^n}$$

allora

$$0 = 0_{\mathbb{R}} \cdot X_1 = (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k) \cdot X_1$$

$$= \alpha_1 X_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cancel{X_2 \cdot X_1} + \dots + \alpha_k \cancel{X_k \cdot X_1}$$

$$= \alpha_1 X_1 \cdot X_1 = \alpha_1 \|X_1\|^2 \overset{X_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = 0$$

Similmente, $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$.

$\blacksquare$

In particolare $k \leq n$.

<u>Def</u>: Una <u>base ortogonale</u> di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ che è anche un insieme ortogonale.

<u>Oss</u>: Una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ un insieme ortogonale di cardinalità n.

<u>Es</u>: $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$$

sono basi ortogonali di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

Def: Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta da versori.

Es: ·) $\left(\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right)$ è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

In particolare:
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (per $\vartheta = 0$

·) La base standard
$\mathcal{e} = (e_1, \dots, e_n)$
di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale.

OSS: Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ allora
$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)$$
è una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

I coefficienti di Fourier

Sia $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Sia $v \in \mathbb{R}^n$.
Allora $\exists!\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n.$$

Calcoliamo x_i:

$$v \cdot v_1 = x_1\, v_1 \cdot v_1 + \cancel{x_2 v_2 \cdot v_1} + \cancel{\dots} + \cancel{x_n v_n \cdot v_1}$$

$$= x_1\, v_1 \cdot v_1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$$

Similmente,

$$\boxed{x_i = \frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}}$$

coefficienti di Fourier di v rispetto a $\mathcal{B}$.

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1,\ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è ortogonale.

$v = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\quad F_{\mathcal{B}}(v) = ?$

coeff. Fourier.

$$v = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{17}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$