Es 2.1: $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad r: 2x+3y=5$

Trovare eq. par. e cart. della retta s passante per P e parallela ad r.

Sol.: $r: AX=b$ ha come sottospazio di giacitura

$$r_0 = \operatorname{Ker} A : 2x+3y=0$$

Quindi,

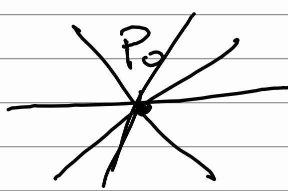
$$r_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ne segue che

$$s = P + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle : 2x+3y=-1.$$

Fascio di rette per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Come sono fatte le rette che contengono P_0?



Una tale retta ha eq. parametrica

$$P_0 + \langle v \rangle \quad \text{con} \quad v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Sia $r: ax+by=c$ una retta che contiene P_0. Allora $c = ax_0 + by_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$$

$F_{P_0} = \{$ rette di $\mathbb{R}^2$ che contengono $P_0 \}$

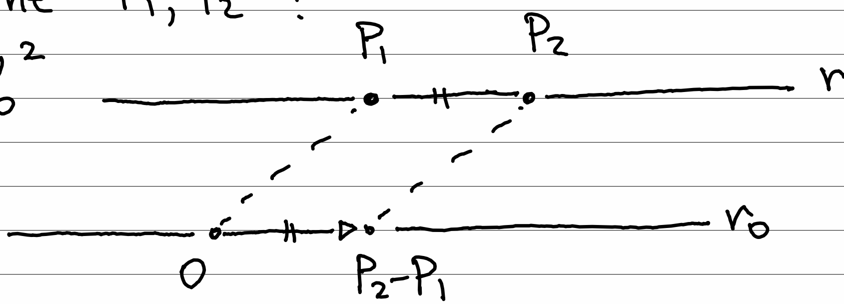
$= \{ a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \mid (a,b) \neq (0,0) \}.$

<u>Es</u>: Rette per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hanno equazione cartesiana $ax + by = a + b$.

<u>Retta per due punti</u>

$P_1, P_2 \in V$, $P_1 \neq P_2$. Retta che contiene P_1, P_2?

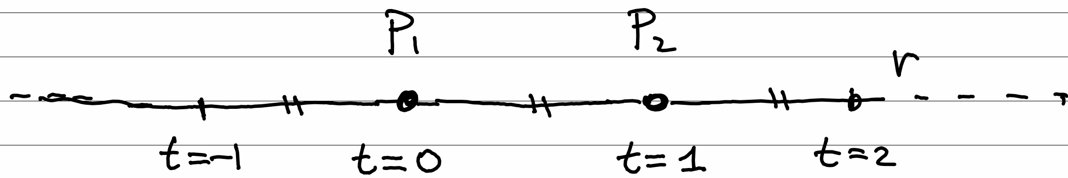
$V = \mathcal{V}_0^2$



$r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle.$

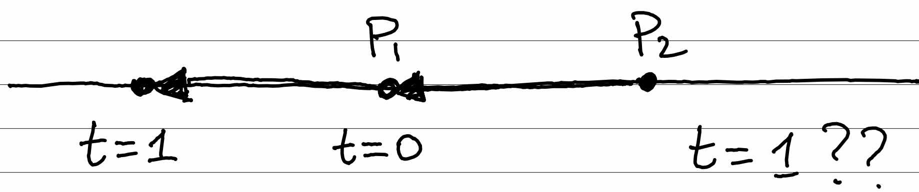
In qualunque V:

$$r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle =$$
$$= \{ P_1 + t(P_2 - P_1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ \underbrace{(1-t)P_1 + tP_2}_{Q_t} \mid t \in \mathbb{R} \} \ni \begin{matrix} P_1 = Q_0 \\ P_2 = Q_1 \end{matrix}$$



$$r = P_1 + \langle P_2 - P_1 \rangle = \{ \underbrace{P_1 + t(P_2 - P_1)}_{= Q_t} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

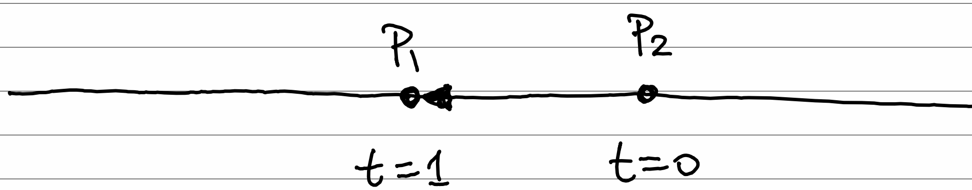
$$r = P_1 + \langle P_1 - P_2 \rangle = \{ P_1 + t(P_1 - P_2) \mid t \in \mathbb{R} \}$$



Parametrizzazione strana della retta.

$2P_1 - P_2 = P_1 + (P_1 - P_2)$

$$r = P_2 + \langle P_1 - P_2 \rangle = \{ P_2 + t(P_1 - P_2) \mid t \in \mathbb{R} \}$$



Siano $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, $P_1 \neq P_2$.

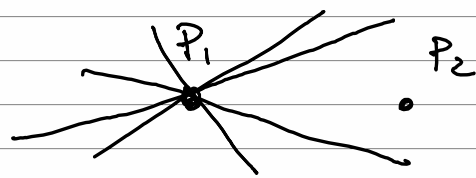
$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Eq. cartesiana di "$r_{P_1P_2} = P_1 \vee P_2$".

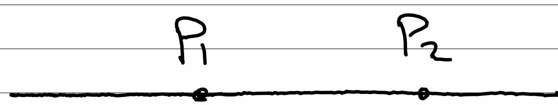
retta per P_1 e P_2.

Fascio di rette per P_1:

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0. \quad (\star)$$



Imponiamo il passaggio per P_2:



$$a(x_2-x_1) + b(y_2-y_1) = 0 \qquad (*)$$

Devo trovare $(a,b) \neq (0,0)$ t.c. $(*)$ è vera: ad esempio $(-(y_2-y_1), (x_2-x_1))$

$$\boxed{-(y_2-y_1)(x-x_1) + (x_2-x_1)(y-y_1) = 0}$$

Eq. cartesiana della retta per P_1 e P_2.

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)}$$

Es: Trovare l'eq. cartesiana della retta passante per $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Sol.:

$$(-1)(y-3) = (-7)(x-2)$$

$$-y+3 = -7x+14$$

$$\boxed{7x - y = 11}$$ verifichiamo.

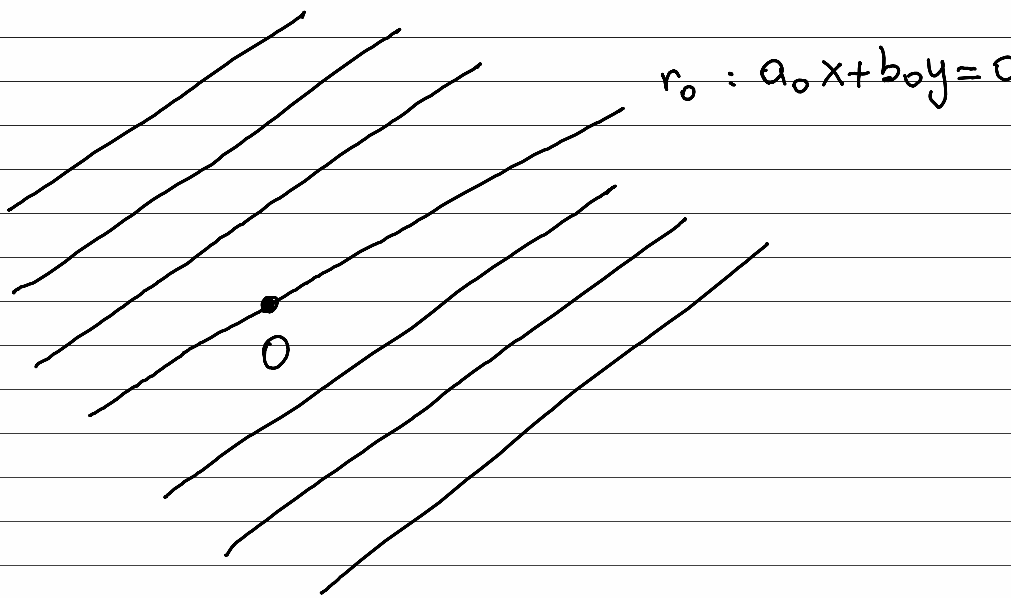
Fascio improprio di rette

Sia $r: a_0 x + b_0 y = c_0$ retta di $\mathbb{R}^2$

Come sono fatte le rette parallele a r.

Una retta è parallela a r se e solo se ha equazione cartesiana della "forma"

$$r_K : \quad a_0 x + b_0 y = K \qquad (K \in \mathbb{R})$$



$$r_K = X_K + \left\langle \begin{pmatrix} -b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

dove X_K è una soluzione di $a_0 x + b_0 y = K$

Es: Trovare eq. parametriche e cartesiana della retta passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallela a $r: 2x+3y=-2$.

Sol.: Consideriamo il fascio improprio:

$$r_K: 2x+3y=K$$

e imponiamo il passaggio per P_0 per trovare K:

$$K = 2+3 = 5$$

La retta cercata ha eq. cart.

$$2x+3y=5.$$

<u>OSS</u>: Siano

$r_1 : ax+by=c \qquad r_2 : a'x+b'y=c'$

due rette di $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo le rette della forma

$$\alpha(ax+by-c)+\beta(a'x+b'y-c)=0$$

al variare di $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Questo insieme contiene r_1 (per $\alpha=1$ e $\beta=0$) ed r_2 (per $\alpha=0$ e $\beta=1$).

Se $r_1\cap r_2=\{P_0\}$ questo è un altro modo di descrivere il fascio di rette per P_0.

Se $r_1 \parallel r_2$ questo è un altro modo di descrivere il fascio improprio.

Es: $r_1: 2x+3y=2$

$r_2: 3x-4y=1$

Sia $P_0 = r_1 \cap r_2$. Trovare un'eq. cartesiana della retta passante per P_0 e $P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Sol.: consideriamo la retta

$$\alpha(2x+3y-2)+\beta(3x-4y-1)=0$$

e imponiamo il passaggio per P_1:

$$\alpha(10-9-2)+\beta(15+12-1)=0$$

$$-\alpha+26\beta=0 \Rightarrow \alpha=26\beta.$$

La retta cercata.

$$26(2x+3y-2)+(3x-4y-1)=0$$

$55x+74y=53$ è la retta cercata.

$\boxtimes$

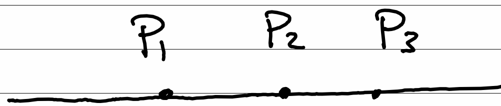
Piano per 3 punti

Siano P_1, P_2, P_3 tre punti.

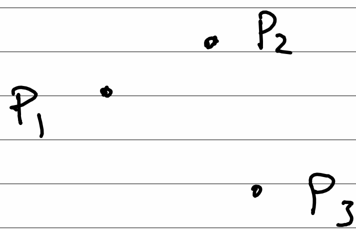
Essi si dicono **allineati** se $\exists$ una retta che li contiene tutti.

Condizione di allineamento

1



2



P_1, P_2, P_3 sono allineati $\Leftrightarrow \exists t$ t.c.

$$P_3 = P_1 + t(P_2 - P_1) \quad \Leftrightarrow \exists t \text{ t.c.}$$

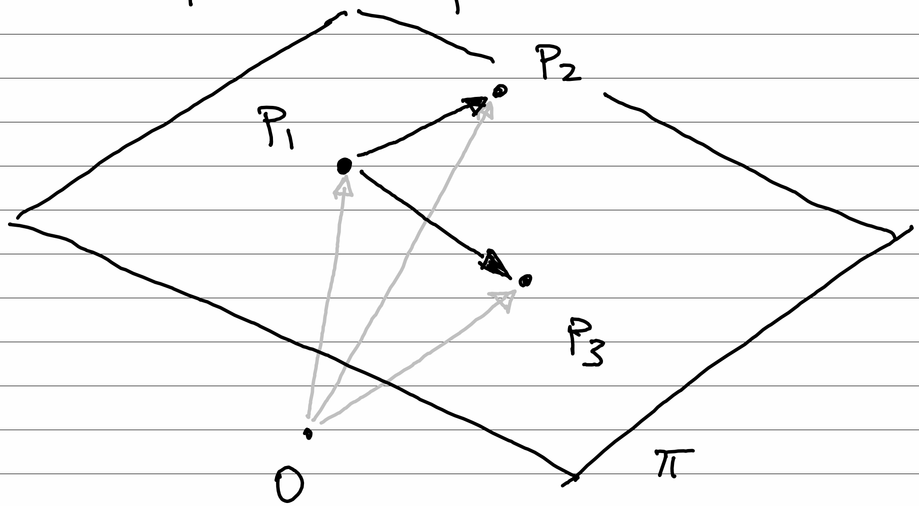
$$P_3 - P_1 = t(P_2 - P_1) \quad \Leftrightarrow$$

$$rg(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1) \leq 1$$

$\Leftrightarrow$ $P_2 - P_1$ e $P_3 - P_1$ sono lin. dip.

Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ non allineati.

Com'è fatto il piano π che li contiene?



$$\pi = P_1 + \langle \underbrace{P_2 - P_1}_{= \overrightarrow{P_1P_2}} , \underbrace{P_3 - P_1}_{= \overrightarrow{P_1P_3}} \rangle$$

Stella di piani per un punto.

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Come sono fatti i piani che contengono P_0? Un piano

$$\pi: \quad ax+by+cz=d \qquad ((a,b,c)\neq(0,0,0))$$

contiene P_0 se e solo se

$$d = ax_0+by_0+cz_0.$$

Eguagliando:

$$\{ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \mid (a,b,c)\neq(0,0,0) \}$$

è la stella di piani per P_0.

__Es__: Determinare il piano per $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

__Sol.__: Consideriamo la stella per P_1:

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$$

e imponiamo il passaggio per P_2 e P_3:

$$a(1-1)+b(2-1)+c(1-1)=0 \quad (\text{per } P_2)$$

$$a(2-1)+b(2-1)+c(1-1)=0 \quad (\text{per } P_3)$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a+b=0 \end{cases}$$

ovvero $a=0$, $b=0$.

Quindi il piano cercato è:

$$\pi: \ z-1=0$$

ovvero

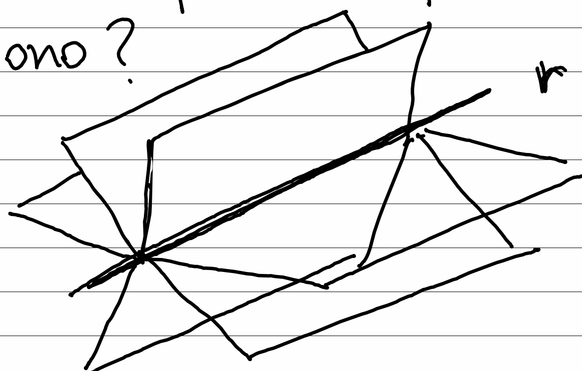
$$\pi: \ z=1.$$

Fascio di piani per una retta di $\mathbb{R}^3$

Sia $r: \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$

con $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$, una retta di $\mathbb{R}^3$.

Come sono fatti i piani che la contengono?



Sono i piani della forma

$$\pi_{\alpha,\beta}: \alpha\,(ax+by+cz-d)+\beta\,(a'x+b'y+c'z-d')=0$$

per $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Es: Fascio di piani per $r: \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

$$\alpha\,(2x+3y-z-1)+\beta\,(x+y+z-2)=0$$

$$(2\alpha+\beta)x+(3\alpha+\beta)y+(-\alpha+\beta)z=\alpha+2\beta.$$

<u>Es</u>: $r = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad r' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

1) Dimostrare che sono sghembe

2) Trovare il piano π contenente r e parallelo a r'.

<u>Sol.</u>:

1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$

$\Rightarrow$ sono sghembe.

2) Eq. cart. per r_1: $\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_3 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Fascio di piani per r_1:

$$\alpha(x_1 - x_2 - 4) + \beta(x_3 - 2) = 0$$

$\pi_{\alpha,\beta}$: $\alpha x_1 + (-\alpha) x_2 + \beta x_3 = 4\alpha + 2\beta$.

$\pi_{\alpha,\beta}$ è parallelo a r se $r'_0 \subset (\pi_{\alpha,\beta})_0$

$(\pi_{\alpha,\beta})_0$: $\alpha x_1 - \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$

$r'_0 \subset (\pi_{\alpha,\beta})_0 \iff \alpha + 2\alpha + \beta = 0 \iff \beta = -3\alpha$

$\pi_{1,-3}$: $x_1 - x_2 - 3x_3 = -2$.

Geometria Euclidea

Misurare distanze e angoli
tra sottospazi affini.

Abbiamo bisogno di un "metro".

L'algebrizzazione del "metro"
si ottiene considerando una
particolare f.ne di 2 variabili
(vettoriali) che si chiama
prodotto scalare.

1) Spazio euclideo standard $(\mathbb{R}^n, \cdot)$

2) Spazi euclidei generali.

Lo spazio euclideo standard.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Def: Il prodotto scalare standard o prodotto puntino ("Dot-product") è la f.ne

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita:

$$X \cdot Y := X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

"X scalar Y" = "X puntino Y"

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 + 6 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 - 3 - 20 = -21$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$$

Proprietà:

1) $\cdot$ è bilineare:

$$(\alpha X+\beta X')\cdot Y = (\alpha X+\beta X')^t Y$$

$$= (\alpha X^t + \beta (X')^t)\, Y = \alpha X^t Y + \beta (X')^t Y$$

$$= \alpha X\cdot Y + \beta (X')\cdot Y$$

Similmente

$$X\cdot(\alpha Y+\beta Y') = \alpha X\cdot Y + \beta X\cdot Y'$$

2) $\cdot$ è simmetrica

$$X\cdot Y = X^t Y = (X^t Y)^t = Y^t (X^t)^t$$

$$= Y^t X = Y\cdot X.$$

3) $\cdot$ è non-degenere:

$$X\cdot Y = 0 \ \forall Y\in\mathbb{R}^n \implies X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Infatti, se $X\cdot Y=0 \ \forall Y\in\mathbb{R}^n$, in particolare, $X\cdot X=0$. Ma questo vuol dire

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=0 \underset{x_i\in\mathbb{R}}{\implies} x_1=x_2=\dots=x_n=0$$

4) $\circ$ è <u>definito-positivo</u>; i.e.

$$X \circ X > 0 \qquad \forall X \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Infatti,

$$X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0.$$