Ricevimento di stamattina :

$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$,

-) $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A.

$P_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$

$P_A(0) = (-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n) = (-1)^n \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

$\Rightarrow \boxed{\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n}$ = prodotto degli autovalori (con molteplicità)

A invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow 0 \notin Sp(A)$.

$\boxed{\mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ = somma degli autovalori (contati con molteplicità).

-) $P_A(x) = x^n - \mathrm{Tr}A\, x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$
-) il coefficiente di $x^{n-1} = -(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

-) COMANDO MATLAB per $P_A(x)$:

charpoly(A) = [1, trA, ..., $(-1)^n$detA]

-) $B^{-1}AB = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Leftrightarrow AB^i = \lambda_i B^i$.

Geometria affine

= studio della posizione reciproca di oggetti geometrici.

In questo corso:

oggetti geometrici = sottospazi affini
= "punti, rette, piani, iperpiani"

Tipiche domande:

Due rette si intersecano?

Sono parallele?

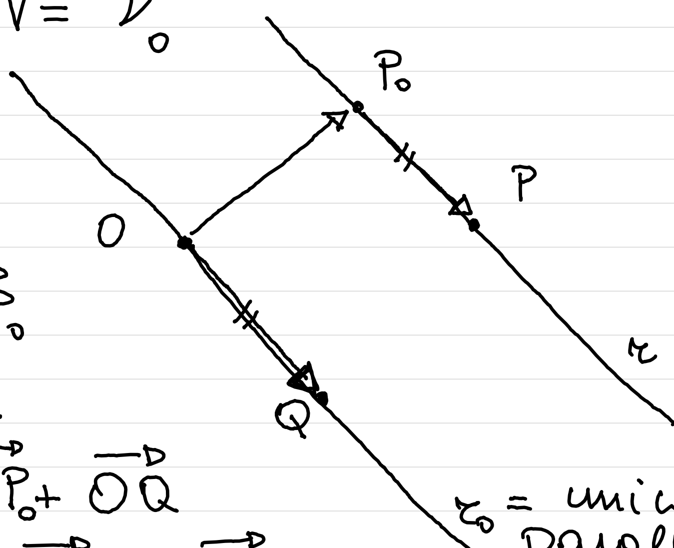
Che cos'è una retta? un piano?
Un punto?

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale.
Un <u>sottospazio affine</u> è il "traslato di un sottospazio vettoriale di V", ovvero è un sottoinsieme di V

$$W = v + W_0 = \{ v + w \mid w \in W_0 \}$$

dove $v \in V$ e $W_0 \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>Es</u>: $V = \mathcal{V}^2_0$



$v = \overrightarrow{OP_0}$

$\forall P \in r$.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$

dove $\overrightarrow{OQ} \equiv \overrightarrow{P_0P}$

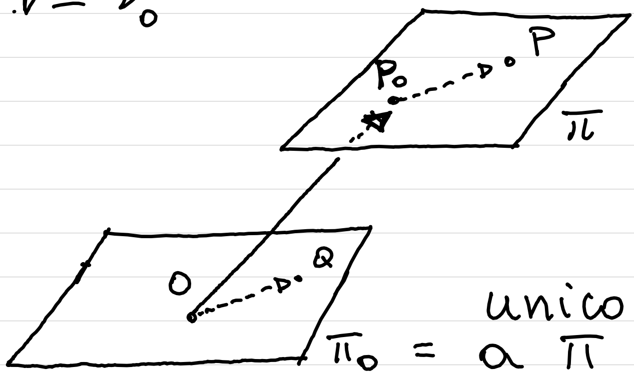
$= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$

r_0 = unica retta parallela a r e passante per O.

s. sp. vettoriale.

$Q \in r_0$ e quindi $r = \overrightarrow{OP_0} + r_0$

$V = V_0^3$



$\pi_0 =$ unico piano parallelo a π e passante per O

Sia $P \in \pi$ sia $Q \in \mathcal{E}^3$ t.c.

$$\vec{OQ} \equiv \vec{P_0P} = \vec{OP} - \vec{OP_0}. \quad (*)$$

$Q \in \pi_0$.

$$\vec{OP} \underset{(*)}{=} \vec{OP_0} + \vec{OQ} \qquad \forall P \in \pi.\ \exists! Q \in \pi_0.$$

$$\pi = \vec{OP_0} + \pi_0$$

è un sottospazio vettoriale.

La <u>dimensione</u> di $v + W_0 = W$ è

$\dim W := \dim W_0$.

Se $\dim W = 0$, W si chiama PUNTO

Se $\dim W = 1$, W si chiama RETTA

Se $\dim W = 2$, W si chiama PIANO

Se $\dim W = \dim V - 1$, W si chiama IPERPIANO.

Esempi: ·) $V = \mathcal{V}_0^2$:

· **PUNTI** : $\{\overrightarrow{OP}\} = P$

· **rette** : $\overrightarrow{OP_0} + \langle v_0 \rangle \qquad v_0 \in \mathcal{V}_0^2$.

· dim 2 $= \mathcal{V}_0^2$.

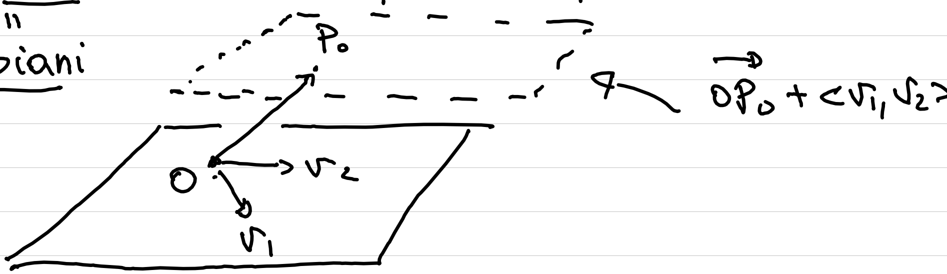
·) $V = \mathcal{V}_0^3$: i s.sp. affini :

· **PUNTI** : $\{\overrightarrow{OP}\}$

· **rette** : $\overrightarrow{OP_0} + \langle v_0 \rangle \qquad v_0 \in \mathcal{V}_0^3$

· **piani** : $\overrightarrow{OP_0} + \langle v_1, v_2 \rangle \qquad v_1, v_2 \in \mathcal{V}_0^3$ lin. ind.

= **iperpiani**



· dim 3 $= \mathcal{V}_0^3$.

·) **Es**: W : $x_1 - x_2 - x_3 = 1$, in $\mathbb{R}^3$.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 = 1 + x_2 + x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 + x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$ è un PIANO.

Def: Due sottospazi affini

$U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0 \subset V$

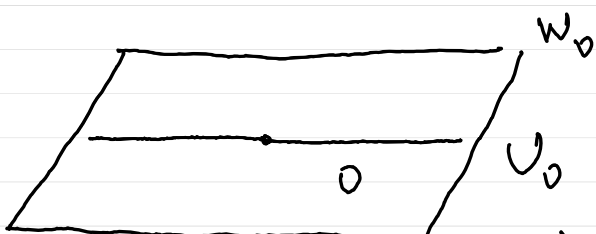
($X_0, Y_0 \in V$, $W_0, U_0 \subset V$ s.sp. vettoriali)

si dicono **paralleli** se

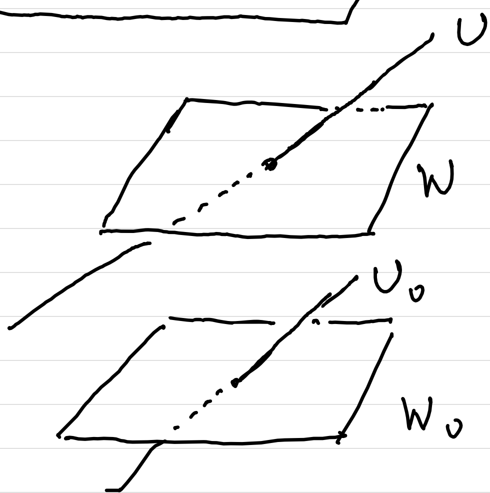
$U_0 \subseteq W_0$ oppure $W_0 \subseteq U_0$.

Es:

•)



•)



$U_0 \not\subseteq W_0$

$W_0 \not\subseteq U_0$

Terminologia: $W = v + W_0 \subset V$

.) W è un s.sp. vettoriale $\Leftrightarrow v \in W_0$.

.) W_0 è univocamente determinato da W:

$W = v + W_0 = v' + W_0'$

$\Rightarrow \forall w \in W_0 \; \exists w' \in W_0'$ t.c. $v + w = v' + w'$

$\Rightarrow w_0 = v' - v + w' \in W_0' \Rightarrow W_0 \subseteq W_0'$

Similmente, $W_0' \subseteq W_0$.

NB: v non è unico.

W_0 si chiama il sottospazio di giacitura di W. Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di W_0, allora $v_1, \dots, v_n$ si chiamano vettori direttori di W.

OSS: $W_0 = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ allora

$$W = v + W_0 = \{ v + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K} \}$$

FORMA PARAMETRICA DI W.

Es: $V = \mathbb{K}^n$. $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in Col(A)$

Le soluzioni di $AX = b$ sono $X_0 + \operatorname{Ker} A$ che è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$.

<u>Es</u>: ·) Le rette $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>$ e $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}>$ sono parallele.

·) Il piano $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}>$ e la retta $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+<\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}>$ sono paralleli.

<u>OSS1</u>: Se $v_1, v_2 \in X_0 + U_0$ allora

$$v_1 - v_2 \in U_0$$

Infatti: $v_1 = X_0 + u_1$, $v_2 = X_0 + u_2$ per $u_1, u_2 \in U_0$ e quindi $v_1 - v_2 = u_1 - u_2 \in U_0$.

<u>OSS2</u>: Se $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ sono paralleli (diciamo $U_0 \subseteq W_0$) allora $U \cap W$ o è vuota oppure

$$U \cap W = U \subseteq W$$

<u>Geometria affine</u>: studio di Parallelismo e intersezione di sottospazi affini.

OSS: $U: AX = b \Rightarrow U_0 = \operatorname{Ker} A$.

OSS: $U = X_0 + U_0$, $W = Y_0 + W_0$.

$U \cap W \neq \emptyset \iff X_0 - Y_0 \in U_0 + W_0$.

OSS: Due possibilità per $U \cap W$:

1. $U \cap W$ è l'insieme vuoto

In questo caso $U_0 \cap W_0 = \{0_V\}$ e quindi

$\dim U \cap W = 0$

2. $U \cap W \neq \emptyset$ allora è un sottospazio affine con giacitura è $U_0 \cap W_0$.

Ci restringiamo s.p.g. a sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$:

Come sono fatti i s.sp. affini di $\mathbb{K}^n$?

Forma parametrica e cartesiana di sottospazi di $\mathbb{K}^m$

Sia $U_0 \subset \mathbb{K}^m$. Sia $\mathcal{B}_{U_0} = (v_1, \dots, v_k)$ una base di U_0.

$$A = (v_1 | \dots | v_k) \in Mat_{m \times k}(\mathbb{K})$$

$\boxed{U_0 = Col(A)}$ e $rg\, A = k = \dim U_0$.

Eq. parametriche di U_0

$$U_0 = \{ t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} \}$$

Es: Trovare le eq. parametriche di

$$U_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sol.:

$$U_0 = Ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \underline{\text{Eq. par. di } U_0}$$

$$U = v + U_0 \quad , \quad U_0 = \mathrm{Col}(A)$$

$$\Rightarrow \quad U = v + \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

$$= v + \mathrm{Col}\, A$$

<u>Eq. parametriche</u>

<u>del s.sp. affine U</u>

<u>Es</u>: $\quad U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

<u>Sol.</u>:

$U = X_0 + \mathrm{Ker}\, A$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$: soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e X_0 è una soluzione del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$U : \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ poniamo $x_3 = 0$ allora $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. cartesiane:

Descrivere un sottospazio affine di $\mathbb{K}^m$ come le soluzioni di un sistema lineare.

- di sottospazi vettoriali

$U_0 = Col(A)$ dove $(A^1, ..., A^k) = \overset{\text{base}}{\mathcal{B}_{U_0}} \subset U_0$

Sia $b \in \mathbb{K}^m$.

$b \in U_0 \iff b \in Col(A)$

$\iff$ Il sistema $AX = b$ è risolubile.

$\iff rg(A|b) = rg(A) = k$

Es: $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Descrivere tutti i vettori $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $b \in U_0$.

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $b \in Col\,A \iff rg(A|b) = rg\,A$

$\iff rg\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array}\right) = rg\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$

$$1 = rg\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array}\right) = rg\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$$

<u>Es</u>: $U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Descrivere tutti i vettori $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $b \in U_0$.

<u>Sol.</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $b \in \mathrm{Col}\, A \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}\, A$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$1 = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_3 - 3b_1 = 0 \end{cases}$$

$$U_0 : \begin{cases} b_2 - 2b_1 = 0 \\ b_3 - 3b_1 = 0 \end{cases}$$ Eq. cartesiane di U_0.

$$U_0 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$! <u>Eq. cartesiane di U_0</u>

<u>Teorema</u>: Sia $U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio vettoriale di dim. k.
Allora esiste una matrice C t.c.

1) $C \in Mat_{(n-k)\times n}(\mathbb{K})$

2) $\operatorname{Ker} C = U_0$.

Inoltre C si trova con il seguente algoritmo

i) $A \in Mat_{n\times k}(\mathbb{K})$ t.c. $U_0 = Col(A)$

ii) $$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} S' & * \\ \hline 0_{(n-k)\times k} & C \end{array}\right)$$

<u>dim</u>: $\operatorname{rg} A = \#$ colonne di A.

$$\operatorname{rref}(A) = \left(\begin{array}{c} \mathbb{1}_k \\ \hline 0_{(n-k)\times k} \end{array}\right)$$

Se $A \underset{R}{\sim} S$: a scola

$$S = \left(\begin{array}{c} S' \\ \hline 0_{(n-k)\times k} \end{array}\right)$$

invertibile

$$(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow (S \mid T)$$

$$TA = S = \left(\frac{S'}{0}\right)$$

$$T = \left(\frac{B}{C}\right) \text{ t.c. } \boxed{CA = 0}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Ker} C = K.$

$$U_0 = \operatorname{Col} A \subseteq \operatorname{Ker} C \quad \Rightarrow \operatorname{Col} A = \operatorname{Ker} C.$$

<u>Es</u>: $\quad U_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad : \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid \mathbb{1}_3) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

C

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è t.c. } \operatorname{Ker} C = \operatorname{Col} A.$$

<u>OSS</u> (importante): Per descrivere un s.sp. vett. di $\mathbb{K}^n$ di dim. K sono necessarie $n-K$ equazioni.

<u>COR</u>: $U = X_0 + U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ un s.sp. affine. $U_0 = \operatorname{Ker} C$. Allora

$$U: \quad CX = CX_0$$ <u>Eq. cartesiana di U.</u>

<u>dim</u>:

Sia $u = X_0 + v \in U \qquad v \in U_0 = \operatorname{Ker} C$.

$$u - X_0 = v \in \operatorname{Ker} C$$

$$\Rightarrow \quad Cu = C(X_0 + v) = CX_0$$

$\Rightarrow$ u soddisfa $CX = CX_0$.

Viceversa se u è t.c. $Cu = CX_0$

allora $u - X_0 \in \operatorname{Ker} C$

$$u = X_0 + \underbrace{(u - X_0)}_{\in \operatorname{Ker} C} \in U. \quad \square$$

Es:

$$U = \overset{x_0}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U_0 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\quad CX \qquad\qquad CX_0$$