Richiami: Dato $\mathcal{L}: V \to V$ lineare, un s.sp. vett. $U \subseteq V$ è $\mathcal{L}$-invariante se $\mathcal{L}(U) = \{\mathcal{L}(u) \mid u \in U\} \subseteq U$.

Se $U = \langle v \rangle$ è una retta, U è $\mathcal{L}$-invariante se e solo se $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\mathcal{L}(v) = \lambda v$.

Def: Dato un vettore non-nullo v ed uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, la coppia (v, λ) si chiama una auto-coppia [Meyer] oppure diciamo che v è un autovettore di autovalore λ per $\mathcal{L}$ se

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v.$$

È vero che $\mathcal{L}$ ammette un autovettore? No, in generale, ad es. $R_\theta : \mathcal{V}_0^2 \to \mathcal{V}_0^2$ ($\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$). Possiamo assumere che $V = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{L} = S_A$, $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ abbiamo definito $V_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$

$V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \Rightarrow V_\lambda(A)$ è l'autospazio di autovalore λ di A.

$$V_\lambda(A) \neq \{0\} \iff \lambda \in Sp(A) = \{\text{autovalori di } A\}$$
$$\iff P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0.$$

$$P_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A).$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Stabire per quali $(a,b) \neq (0,0)$ in $Mat_{1\times 2}(\mathbb{R})$ la retta $r: ax+by=0$ è A-invariante.

Sol.: $S_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

r è A-invariante $\Leftrightarrow$ r è generata da un autovettore per A.

$r = \text{Ker}\,(a,b) = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$.

Se $b=0$, $r: ax=0$ e quindi $r = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A e_2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ Quindi $x=0$ non è A-invariante.

Quindi possiamo assumere $b=1$. $r = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$

Per quali $a \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}$ è un autovettore per A?

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-a \\ -2-2a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1-a = -\lambda \\ -2-2a = \lambda a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1+a \\ -2(1+a) = (1+a)a \end{cases}$$

Se $a=0$ $-2=0$ $\lightning$ $\Rightarrow a \neq 0$.

Se $1+a=0$ abbiamo una soluzione $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\boxed{r: -x+y=0}$

Se $1+a \neq 0$ $a=-2$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{r: -2x+y=0}$. ■

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

·) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad P_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\, x + \det A$ è un polinomio omogeneo di grado 2.

$$Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid P_A(\lambda) = 0 \} = \left\{ \frac{\mathrm{Tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}A)^2 - 4\det A}}{2} \right\}.$$

$Sp(A)$:

- $(\mathrm{Tr}A)^2 > 4\det A$ 2 radici reali distinte
- $(\mathrm{Tr}A)^2 = 4\det A$ 2 radici reali coincidenti (1 sola radice con molteplicità 2)
- $(\mathrm{Tr}A)^2 < 4\det A$ 2 radici complesse e coniugate:

$$\frac{\mathrm{Tr}A}{2} + i\,\frac{\sqrt{|\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det A|}}{2} \quad e \quad \frac{\mathrm{Tr}A}{2} - i\,\frac{\sqrt{|\mathrm{Tr}A^2 - 4\det A|}}{2}$$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix} = (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\left[(x-2)(x-3) - 8\right] =$$

$$= (x-1)\left[x^2-5x-2\right] = x^3-5x^2-2x-x^2+5x+2$$

$$= x^3-6x^2+3x+2.$$

è un polinomio monico (il coeff. di grado max è 1) di grado 3.

$Sp(A) = ?$: $\quad x^2-5x-2=0 \iff x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$

$Sp(A) = \{1, \lambda_1, \lambda_2\}$ dove $\lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$.

<u>Prop.</u>: Se $A \in Mat_{\underline{3}\times\underline{3}}(\mathbb{R})$. Allora

$$P_A(x) = x^3 - \operatorname{Tr}A\, x^2 + \frac{1}{2}\left[\operatorname{Tr}(A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right]x - \det A.$$

<u>dim</u> (conto che trovate negli appunti).

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & \underline{1} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot 5 = -20.$$

$\operatorname{Tr} A = 5 \qquad (\operatorname{Tr}A)^2 = 25$

$$\operatorname{Tr}(A^2) = A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = 6 + 11 + 12 = 29$$

$$P_A(x) = x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}(25-29)x + 20$$

$$= x^3 - 5x^2 - 2x + 20.$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Sol.:

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -3 & -1 \\ -2 & x-1 & -2 \\ 1 & -2 & x-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & -3-(x-1)(-2) & -1-(x-1)(x-3) \\ 0 & x-1-4 & -2+2x-6 \\ 1 & -2 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2x-5 & -1-(x^2-4x+3) \\ x-5 & 2x-8 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2x-5 & -x^2+4x-4 \\ x-5 & 2x-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2x-5 & -x^2+4x-4 \\ x-5 & 2x-8 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -x^2+2x+4 \\ x-5 & 2x-8 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x & -x^2+4 \\ x-5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2x - (x-5)(-x^2+4)$$

$$= 2x - (\underline{-x^3} + \underline{4x} + \underline{5x^2} - 20)$$

$$= x^3 - 5x^2 - 2x + 20$$

<u>Prop.</u>: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A)$ è un polinomio monico di grado n della forma

$$P_A(x) = x^n - \mathrm{Tr}A\, x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

<u>Def</u>: $P_A(x)$ si chiama il <u>polinomio caratteristico</u> di A

<u>COR</u>: $|Sp(A)| \leq n$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \dots, m_k > 0$ t.c.

$$P_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

$$Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}.$$

m_i = molteplicità algebrica di $\lambda_i =: ma_A(\lambda_i)$

<u>dim</u>: Teorema fondamentale dell' algebra.

OSS 1: Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in Sp(A)$ $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ allora $S_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non ha autovettori di autovalore λ. Invece $S_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ li ha.

OSS 2: Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ allora $p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A)$ è un polinomio a coefficienti reali.

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_i \in \mathbb{R}.$$

In particolare se $\lambda \in Sp(A)$ i.e. $p_A(\lambda) = 0$ allora anche $\bar{\lambda} \in Sp(A)$.

$\bar{a_i} = a_i$ $\qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \,;\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$$p_A(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^n + a_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_1\bar{\lambda} + a_0 =$$

$$= \bar{\lambda}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1\bar{\lambda} + \bar{a}_0 =$$

$$= \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0} = \overline{p_A(\lambda)} = \bar{0} = 0.$$

Es 4.1.1. : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Calcolare Sp(A).

Sol. :

$$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -4 & -1 \\ 4 & x+7 & -2 \\ -6 & -6 & x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -4 & -1 \\ 6 & x+7 & -2 \\ -6-x & -6 & x \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x & -4 & -1 \\ 6 & x+7 & -2 \\ -6 & -10 & x-1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -4 & -1 \\ 6 & x+7 & -2 \\ 0 & x-3 & x-3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x & -4 & 3 \\ 6 & x+7 & -x-9 \\ 0 & x-3 & 0 \end{pmatrix} = -(x-3)\det\begin{pmatrix} x & 3 \\ 6 & -x-9 \end{pmatrix}$$

$$= -(x-3)\det\begin{pmatrix} x+3 & 3 \\ -x-3 & -x-9 \end{pmatrix} = -(x-3)\det\begin{pmatrix} x+3 & 3 \\ 0 & -x-6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_A(x) = (x-3)(x+3)(x+6)$$

$$\Rightarrow \quad Sp(A) = \{3, -3, -6\}$$

Diagonalizzazione di endomorfismi lineari

Def: $\mathcal{L}: V \to V$ lineare si dice <u>diagonalizzabile</u> se $\exists$ base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V nella quale $\mathcal{L}$ è rappresentato da una matrice diagonale.

i.e. $\exists\ D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ t.c.

il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & V \\ {\scriptstyle F_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{S_D} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

commuta.

$$D = \left(F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_1)) \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_2)) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_n)) \right)$$

$$= \left(\begin{matrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{matrix} \right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

OSS: $\mathcal{L}$ è diagonalizzabile se esiste una base di V composta di autovettori per $\mathcal{L}$.

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ diciamo che

- A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se $S_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile
- A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se $S_A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è diagonalizzabile.

(diagonalizzabile = diagonalizzabile su $\mathbb{R}$).

Caratterizziamo gli endomorfismi diagonalizzabili:

$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\quad S_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

è diagonalizzabile se $\exists\ \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$
e una matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"', "S_{B^{-1}} ="] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"', "= S_{B^{-1}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "S_D"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

dove $B = (v_1 | \cdots | v_n)$

commuta. Quindi A è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)
se $\exists\ B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile e
$\exists\ D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.c.

$$B^{-1} A B = D.$$

In questo caso $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ e le colonne di B formano una base di $\mathbb{R}^n$ composta di autovettori per A,

$$A B^i = \lambda_i B^i$$

Molteplicità geometrica di un autovalore

Sia $\lambda \in Sp(A)$. La <u>molteplicità geometrica</u> di λ (come autovalore di A) è il numero

$$mg_A(\lambda) := \dim V_\lambda(A) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$$= n - rg(\lambda \mathbb{1}_n - A).$$

Es 4.1.2:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $Sp(A)$ e le molteplicità geometriche dei suoi autovalori.

Sol.:
$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x-1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & -1 \\ -4 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^2 \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix} = (x-1)^3 (x+1).$$

$$Sp(A) = \{1, -1\} \qquad P_A(x) = (x-1)^3 (x+1)$$

$$ma_A(1) = 3 \ , \qquad ma_A(-1) = 1.$$

$$mg_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_4 - A) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \overset{\downarrow}{0} & 2 & \overset{\downarrow}{0} & \overset{\downarrow}{-1} \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\mathcal{B}_{V_1(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$mg_A(-1) = \dim V_{-1}(A) = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\mathcal{B}_{V_{-1}(A)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$