Diagonalizzazione di un endomorfismo lineare

Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un endomorfismo lineare

$$V \xrightarrow{\mathcal{L}} V \qquad (V \circlearrowleft \mathcal{L} : \text{ $\mathcal{L}$ agisce su V, muove i vettori di V})$$

$$v \longmapsto \mathcal{L}(v)$$

$$v \longmapsto \mathcal{L}(v) \longmapsto \mathcal{L}^2(v) \longmapsto \mathcal{L}^3(v) \longmapsto \dots$$

Traiettoria di v tramite $\mathcal{L}$.

Un sottospazio vettoriale U di V è <u>$\mathcal{L}$-invariante</u> (o $\mathcal{L}$-stabile) se $\mathcal{L}(U) \subseteq U$.

<u>Es</u>: $\mathcal{L}(0_V) = 0_V$ (perché $\mathcal{L}$ è lineare) e quindi $U = \{0_V\}$ è $\mathcal{L}$-invariante.

Dato $\mathcal{L}$ esistono sottospazi invarianti per $\mathcal{L}$?

Sottospazi invarianti di dimensione uno: autovettori e autovalori

Sia $U = \langle v \rangle$ $v \neq 0_V$, $v \in V$, $\mathcal{L}$-invariante:

$\forall u \in U \quad \mathcal{L}(u) \in U$.

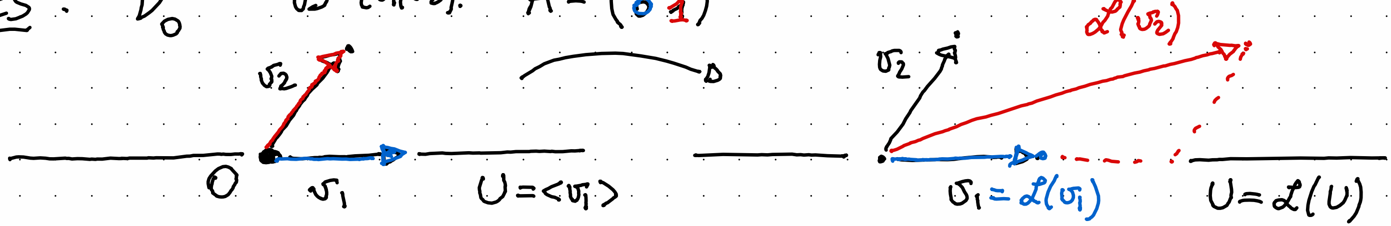
$$\left.\begin{array}{l} \forall u \in U \ \exists\, t \in \mathbb{K} \text{ t.c. } u = t v \\ \exists\, s \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \mathcal{L}(u) = s v. \end{array}\right]$$

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(t v) = t\, \mathcal{L}(v)$$

$$\mathcal{L}(u) = s v$$

Se $u = v$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\mathcal{L}(v) = \lambda v$.

Es: V_O^2 $\quad \mathcal{B} = (v_1, v_2)$. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Def: Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un endomorfismo lineare di V.
Un <u>autovettore di autovalore λ</u> è un vettore non-nullo $v \in V \setminus \{0_V\}$ t.c.

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v$$

dove $\lambda \in \mathbb{K}$.

Es:
·) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. $\quad Ae_1 = A^1 = 2e_1$

$\Rightarrow e_1$ è un autovettore di A di autovalore 2.

·) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$. Tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ sono autovettori per A di autovalore 0.

$$0_{2\times 2}\, v = 0\, v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

.) Se $\mathcal{L} = 0 : V \longrightarrow V$ allora ogni vettore
$v \longmapsto 0_V$

non-nullo di V è un autovettore di autovalore 0 per $\mathcal{L}$. Ogni sottospazio vettoriale è $\mathcal{L}$-invariante.

.) Se $\mathcal{L} = Id_V : V \longrightarrow V$, allora $\mathcal{L}(v) = v = 1v$
$v \longmapsto v$

Ogni vettore non-nullo è un autovettore di autovalore 1. Ogni sottospazio vettoriale di V è $\mathcal{L}$-invariante.

$\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$Ae_1 = A^1 = 2e_1 \Rightarrow e_1$ è un autovettore di autovalore 2

$Ae_2 = A^2 = 3e_2 \Rightarrow e_2$ è un autovettore di autovalore 3.

$U_1 = \langle e_1 \rangle \ni te_1$

$A(te_1) = t(Ae_1) = t(2e_1) = \underset{\uparrow \, !!}{2}(te_1) \Rightarrow te_1$ è un autovettore di autovalore 2 $(\forall t \in \mathbb{R})$.

$\Rightarrow U_1$ è A-invariante.

$U_2 = \langle e_2 \rangle \ni te_2$

$A(te_2) = t(Ae_2) = t(3e_2) = 3(te_2) \Rightarrow te_2$ è un autovettore di autovalore 3 $(\forall t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow U_2$ è A-invariante.

$A(4e_1 + 5e_2) = 4Ae_1 + 5Ae_2 = 4(2e_1) + 5(3 \cdot e_2) =$

$= 8e_1 + 15e_2 \underset{??}{\in} \langle 4e_1 + 5e_2 \rangle$ NO! $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$ sono lin. ind.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\3y\end{pmatrix}\in\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}x&2x\\y&3y\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3xy-2xy=0$$

$$\Leftrightarrow xy=0.$$

Quindi $U=\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle$ è una retta invariante

$$\Leftrightarrow U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \text{ o } U=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

OSS: Una retta $U = \langle v \rangle < V$ è $\mathcal{L}$-invariante se e solo se v è un autovettore per $\mathcal{L}$.

dim: Se $\mathcal{L}(U) \subseteq U$ allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\mathcal{L}(v) = \lambda v$ e quindi v è un autovettore di autovalore λ.
Viceversa, se $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\mathcal{L}(v) = \lambda v$ allora $\forall t \in \mathbb{K}$,

$$\mathcal{L}(tv) = t(\mathcal{L}(v)) = t(\lambda v) = \lambda(tv) \in \langle v \rangle = U$$

e quindi $\mathcal{L}(U) \subseteq U$.

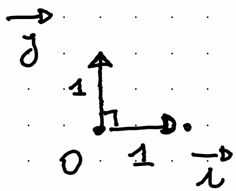
OSS: $\mathcal{L}(\langle v \rangle) = \langle v \rangle \iff \lambda \neq 0$.

Una retta generata da un autovettore si chiama un'asse di simmetria per $\mathcal{L}$.

È vero che ogni endomorfismo lineare di V ammette almeno un autovettore?

Dipende dal <u>campo</u>: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

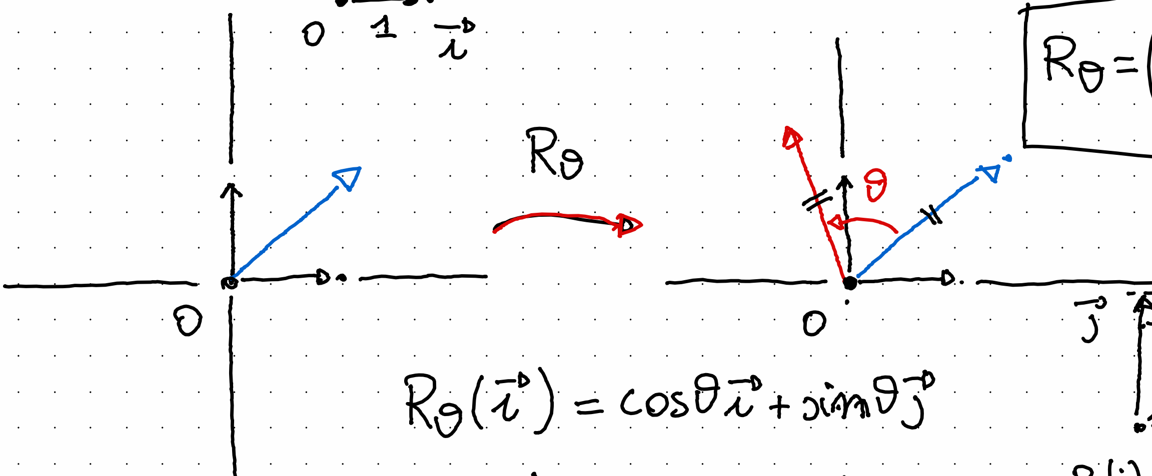
<u>Es</u>: Fissiamo $\vartheta \in [0, 2\pi)$.



è una base di V_O^2

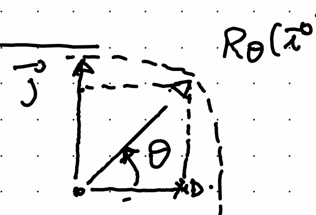
MATRICE DI ROTAZIONE

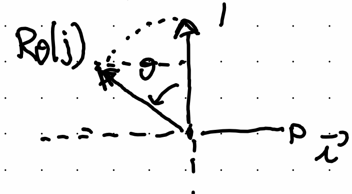
$$\boxed{R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}}$$

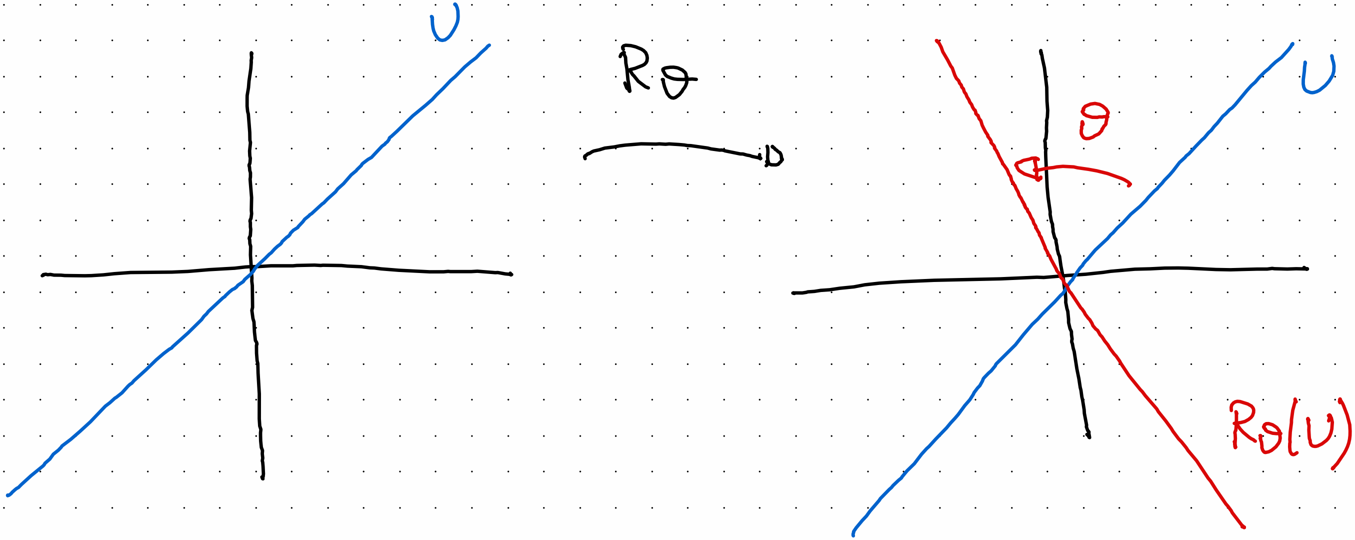


$$R_\vartheta(\vec{i}) = \cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j}$$

$$R_\vartheta(\vec{j}) = -\sin\vartheta\,\vec{i} + \cos\vartheta\,\vec{j}$$







Se $\theta = 0$ $R_\theta = Id_{V_0^2}$
Se $\theta = \pi$ $R_\theta = -Id_{V_0^2}$ $\Rightarrow$ Tutte le rette sono invarianti.

Se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, R_θ non~~e~~ ha rette $\subset V_0^2$ invarianti e quindi $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ autovettori in $\mathbb{R}^2$.

Cosa vuol dire essere un autovettore di autovalore λ?

Ci possiamo ricondurre al caso $\mathcal{L} = S_A$:

- Fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V
- consideriamo la matrice associata a $\mathcal{L}$ in $\mathcal{B}$

(sia in partenza che in arrivo):

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{L}} & V \\ F_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow F_{\mathcal{B}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{S_A} & \mathbb{K}^n \end{array} \qquad A^i = F_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}(v_i)).$$

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v \quad \Longleftrightarrow \quad A\, F_{\mathcal{B}}(v) = \lambda\, F_{\mathcal{B}}(v)$$

v è autovettore di autovalore λ per $\mathcal{L}$

$$\Updownarrow$$

$F_{\mathcal{B}}(v)$ è un autovettore di autovalore λ per A (per S_A).

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v \quad \Rightarrow \quad F_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}(v) = F_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \lambda F_{\mathcal{B}}(v)$$

$$F_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L} = S_A \circ F_{\mathcal{B}}$$

$$S_A \circ F_{\mathcal{B}}(v)$$

Viceversa :

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad S_A \circ F_{\mathcal{B}}(v) = F_{\mathcal{B}} \circ \mathcal{L}(v)$$

$$X = F_{\mathcal{B}}(v)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(v) = F_{\mathcal{B}}^{-1}\left(F_{\mathcal{B}} \mathcal{L}(v)\right)$$

$$= F_{\mathcal{B}}^{-1}\left(S_A F_{\mathcal{B}}(v)\right)$$

$$= F_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\lambda F_{\mathcal{B}}(v)\right)$$

$$= \lambda v$$

Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. $v \in \mathbb{K}^n$ è un autovettore di autovalore λ per A se $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ e

$$Av = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda \mathbb{1}_n)v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad v \in \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}_n) \text{ e } v \neq 0_{\mathbb{K}^n}.$$

$V_\lambda(A) \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ è l'insieme degli autovettori di autovalore λ.

<u>Def</u>: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ definiamo

$$V_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}_n) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

Se $V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ allora $V_\lambda(A)$ si chiama l'<u>autospazio di autovalore λ per A</u>.

A ha un autovettore di autovalore λ

$$\Updownarrow$$

$$V_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq 0.$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \mathbb{1}_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq 0 \iff \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0}$$

Def: Lo <u>spettro</u> di A è l'insieme dei suoi autovalori

$$Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ è un autovalore per } A \}$$

$$= \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid V_\lambda(A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \}$$

$$= \{ \lambda \in \mathbb{K} \mid \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0 \}.$$

Consideriamo la funzione

$$P_A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A).$$

$$Sp(A) = \{ \text{zeri o radici in } \mathbb{K} \text{ di } P_A(x) \}.$$

Es :

·) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_2 - A) = \det\begin{pmatrix} x-2 & -3 \\ 0 & x-4 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-2)(x-4)$$

$Sp(A) = \{2, 4\} \subset \mathbb{R}$

·) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - Tr(A)\,x + \det A$$

$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

$\cdot)$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - Tr(A)\, x + \det A$$

è un polinomio monico di grado 2.

$$Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid P_A(\lambda) = 0 \}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Tr(A)^2 - 4 \det A = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc$$

$$= a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc$$

$$Sp(A) \subset \mathbb{R} \iff (a-d)^2 + 4bc \geq 0.$$

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{-4\sin^2\theta}}{2} =$$

$$= \cos\theta \pm i \sin\theta$$

$$Sp(R_\theta) \subset \mathbb{R} \iff \sin\theta = 0 \iff \theta = 0 \text{ o } \theta = \pi.$$

Se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, $R_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ha due autospazi $V_{\cos\theta + i\sin\theta}$ e $V_{\cos\theta - i\sin\theta}$.

Prop.: Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$P_A(x)$ è un polinomio monico di grado n

$$P_A(x) = X^n - Tr(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

cor: $|Sp(A)| \leq n$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $Sp(A)$ ha n elementi contati con la loro molteplicità:

$$P_A(x) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2} \cdots (X-\lambda_K)^{m_K}$$

Teo fond dell'algebra

per opportuni $\lambda_1, \dots, \lambda_K \in \mathbb{C}$ distinti e

$m_1, m_2, \dots, m_K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad m_1 + \dots + m_K = n$.

m_i = molteplicità algebrica di λ_i. $\quad Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$.