Calcolo dell'inversa mediante il determinante

Data $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ abbiamo visto

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

$\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$

sviluppo del det. lungo la riga i — sviluppo del det. lungo la colonna j

Il co-fattore (i,j) di A è $\boxed{C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

La matrice <u>aggiunta</u> di A è $Agg(A)^j_i = C_{ij}$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & & \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\underset{\det A \neq 0}{\Longrightarrow} A\, Agg(A)^t = \det A\, \mathbb{1}_2$$

<u>Teorema</u>: Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\boxed{A \, Agg(A)^t = \det A \, \mathbb{1}_n}$$

<u>dim</u>: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$

Dobbiamo dimostrare che

$$[A \, Agg(A)^t]_i^j = [\det A \, \mathbb{1}_n]_i^j = \begin{cases} \det A & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Caso $i=j$:

$$[A \, Agg(A)^t]_i^i = A_i \, [Agg(A)^t]^i = A_i \, [Agg(A)_i]^t =$$

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} = a_{i1} c_{i1} + a_{i2} c_{i2} + \dots + a_{in} c_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \det(A).$$

Caso $i \neq j$:

$$[A\, Agg(A)^t]_i^j = A_i\, [Agg(A)^t]^j = A_i\, [Agg(A)_j]^t$$

$$= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{jk}$$

Dimostriamo che $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{jk} = 0$.

Consideriamo la matrice

$$B = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Osserviamo: $b_{jk} = a_{ik}\ \forall k$, $\quad c_{jk}(B) = c_{jk}(A)\ \forall k$.

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, c_{jk}(B) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{jk}(A). \qquad \blacksquare$$

COR: Se A è invertibile,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t$$

[Formula di Cramer]

dim:

1) A è invertibile $\iff \det A \neq 0$

2) $A \operatorname{Agg}(A)^t = \det A \, \mathbb{1}_n \implies$

$\textcircled{2} \implies A^{-1}\left(A \operatorname{Agg}(A)^t\right) = \det A \, A^{-1}$

$\implies \operatorname{Agg}(A)^t = \det A \, A^{-1} \underset{\textcircled{1}}{\implies} A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t.$

$\blacksquare$

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Agg}(A)^t = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

Es: Utilizzando la formula di Cramer calcolare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1/2 & -3 \\ -2 & 1/2 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol.:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} = -4 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 2$$

$$C_{11} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 4, \quad C_{21} = -\cancel{A}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 1/2, \quad C_{31} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = -2, \quad C_{22} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = 1/2, \quad C_{32} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$C_{13} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4, \quad C_{23} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad C_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

Utilizzo del determinante per risolvere (alcuni) sistemi lineari.

Sia $AX=b$ un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Assumiamo che $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$.

Allora il sistema ammette un'unica soluzione X_0, data da

$$X_0 = A^{-1} b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\left(A^{-1}(AX) = A^{-1} b \Rightarrow X = A^{-1} b \right)$.

$$y_j = (A^{-1}b)_j = (A^{-1})_j\, b = \frac{1}{\det A}\left[Agg(A)^t\right]_j b$$

$$= \frac{1}{\det A}\left[Agg(A)^j\right]^t b = \frac{1}{\det A}(C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{nj})\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}\right)$$

$$= \frac{\det\left(A^1 | \dots | A^{j-1} | b | A^{j+1} | \dots | A^n\right)}{\det A} = \frac{\det A^j(b)}{\det A}$$

[Formula di Cramer per la risoluzione di sistemi lineari].

Es:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Sol.:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 8+3 = 11 \neq 0 \Rightarrow \exists!\ \text{soluzione} \quad X_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{11} \det \begin{array}{cc} b & \\ \hline 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{array} = \frac{1}{11} \cdot (4+6) = \frac{10}{11}$$

$$y_2 = \frac{1}{11} \det \begin{array}{cc} & b \\ \hline 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} = \frac{1}{11} (4-1) = \frac{3}{11}$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Sol.:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -13$$

$\Rightarrow \exists !$ soluzione b $X_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$y_1 = -\frac{1}{13} \det \begin{pmatrix} \boxed{4} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{13} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$y_2 = -\frac{1}{13} \det \begin{array}{c} \quad\; b \\ \begin{pmatrix} 2 & \boxed{4} & 2 \\ 1 & \boxed{1} & 3 \\ -2 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \end{array} = -\frac{1}{13} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{26}{13} = 2$$

$$y_3 = -\frac{1}{13} \det \begin{array}{c} \qquad\quad b \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{4} \\ +1 & -1 & \boxed{1} \\ -2 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array} = -\frac{1}{13} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{13}{13} = 1$$

Utilizzo del determinante per calcolare il rango

(Teorema degli orlati)

Notazione: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Dati s indici di riga $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le m$ e l indici di colonna $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_l \le n$ ~~definiamo~~ denotiamo

$$A([i_1, \dots, i_s], [j_1, j_2, \dots, j_l]) \in Mat_{s \times l}(\mathbb{K})$$

la sottomatrice di supportata sulle righe $i_1, \dots, i_s$ e sulle colonne $j_1, \dots, j_l$.

In MATLAB: `A([i1,...,is],[j1,...,jl])`.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A([2,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A([2,4],[1,3,5]) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad A([2,4],[2,3]) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \neq A([2,3],[2,4])$$

Def: Sia $B = A([i_1,\dots,i_k],[j_1,\dots,j_k])$ una sottomatrice quadrata. Dati due indici $\ell \notin \{i_1,\dots,i_k\}$ e $s \notin \{j_1,\dots,j_k\}$ la sottomatrice

$$A([i_1,\dots,i_k]\cup\{\ell\},[j_1,\dots,j_k]\cup\{s\})$$

si chiama l'orlata di B con la riga ℓ e la colonna s.

Il determinante di una sottomatrice quadrata $k\times k$ si chiama un minore di ordine k.

Il determinante di un'orlata di B si chiama un minore orlato.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A([2,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B = A([1,2],[1,2])$$

$$A([1,2,3],[1,2,3])$$

Teorema (dei minori orlati)

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{rg} A = k$$

$$\Updownarrow$$

$\exists$ minore di ordine k diverso da zero con la proprietà che tutti i suoi minori orlati sono zero.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 100 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

sono lin. indipendenti perché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 3 & 100 \\ 4 & 2000 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}\, A = ?$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 15 \neq 0 \Rightarrow$$

$\exists$ 3-minore $\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}\, A \geq 3$. Orliamolo nei due modi possibili.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{rg}\, A = 3$$