Abbiamo visto che la funzione $\det = d^{(n)}$

$$\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

definita come:

$$\det(x) = x \quad \text{se } x \in \mathbb{K} \ (\text{e } n=1)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) \qquad (\text{se } A \in Mat_{n\times n},\ n>1)$$

è multilineare e alternante sulle righe e $\det \mathbb{1}_n = 1$.

OSS (importante): $\det A \neq 0 \iff A$ è invertibile $\iff rg A = n$.
(visto nella dim. sull'unicità).

OSS: Se V è un $\mathbb{K}$-sp. vett. e $\mathcal{B}$ è una base di V allora $(w_1, \dots, w_n) \subset V$ è una base $\iff \det(F_{\mathcal{B}}(w_1) | \dots | F_{\mathcal{B}}(w_n)) \neq 0$.

Per calcolare det: Non bisogna usare la definizione. Invece.

- operare sulle righe per
  1) creare molti zeri sulla 1ª colonna $\to$ usare la def.
  2) ridurla a scala $\to$ $\det\begin{pmatrix} s_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & s_{nn} \end{pmatrix} = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}$.

Es: $\det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 3-2i & 3i & 8+2i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix} =$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-i & i & 1+i \\ 1 & i & 4-i \\ 2-2i & 2i & 4+3i \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2+6i \\ 1 & i & 4-i \\ 0 & -2 & -2+13i \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -1 & -2+6i \\ -2 & -2+13i \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2-6i \\ -2 & -2+13i \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2-6i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} = 2+i$$

Teorema di Binet

Siano $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. $\boxed{\det(AB) = \det A \det B.}$

dim 1: AB è invertibile se e solo $S_A \circ S_B$ è invertibile se e solo se (Esercizio) A è invertibile e B è invertibile.
Quindi l'uguaglianza $\det AB = \det A \det B$ è vera se A non è invertibile o B non è invertibile.

Assumiamo che A sia invertibile e B sia invertibili.

Se $A = E$ è una matrice elementare:

$$\begin{cases} \det P_{ij} = -\det \mathbb{1}_n = -1 \\ \det(D_i(\lambda)) = \lambda \\ \det(F_{ij}(c)) = 1 \end{cases}$$

Quindi $\det(EB) = \det E \det B \quad \forall\, E$ elementare. $(*)$

Sia A una matrice invertibile. Allora

$$A \underset{R}{\rightsquigarrow} \mathbb{1}_n$$

ovvero $\exists$ matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c.

$$E_k \cdots E_1 A = \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow \quad A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

Poiché l'inversa di una matrice è una matrice elementare, A è prodotto di matrici elementari.

$$A = F_1 \cdots F_k \qquad (\text{con } F_i = E_i^{-1})$$

$$\det(AB) = \det(F_1 \cdots F_k B) \overset{(*)}{=} \det(F_1) \cdots \det(F_k) \det B$$

$$\overset{(*)}{=} \det(F_1 \cdots F_k) \det B = \det A \det B.$$

dim 2: Supponiamo che B sia invertibile.
Consideriamo la funzione

$$f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

definita come

$$f(A) := \frac{\det(AB)}{\det B}$$

1) $f(P_{ij}A) = \dfrac{\det(P_{ij}AB)}{\det B} = -\dfrac{\det(AB)}{\det B} = -f(A)$

2) $f(D_i(\lambda)A) = \dfrac{\det D_i(\lambda)AB}{\det B} = \lambda \dfrac{\det(AB)}{\det B} = \lambda f(A)$

3) $f(F_{ij}(c)A) = \dfrac{\det(F_{ij}(c)AB)}{\det B} = \dfrac{\det(AB)}{\det B} = f(A)$

4) $f(\mathbb{1}_n) = \dfrac{\det(B)}{\det B} = 1$

$$\Rightarrow f(A) = \det A \qquad \blacksquare$$

COR: $\det(AB) = \det(BA)$ anche se $AB \neq BA$.

COR: Se A è invertibile, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.

Calcolo del determinante

- operazioni sulle righe
- det (a scala) = prodotto degli el. diagonali

dim:

$$\det\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & s_{nn} \end{pmatrix} = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn}$$

Se $\exists\, i : s_{ii} = 0$ allora $\operatorname{rg} S < n$ e quindi $\det S = 0$.

Se $s_{11}\cdots s_{nn} \neq 0$ allora $\operatorname{rg} S = n$ e

$$\det\begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & s_{nn} \end{pmatrix} = s_{11}s_{22}\cdots s_{nn} \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{s_{12}}{s_{11}} & \frac{s_{13}}{s_{11}} & \cdots & \frac{s_{1n}}{s_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{s_{23}}{s_{22}} & \cdots & \frac{s_{2n}}{s_{2n}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

usando $F_{ij}(c)$

$$\downarrow$$

$$= s_{11}\cdots s_{nn} \det(\mathbb{1}_n).\ \blacksquare$$

Operazioni elementari sulle colonne

3 operazioni elementari sulle colonne

(C1) $C^i \longleftrightarrow C^j$ scambio della colonna i con la colonna j.

(C3) $C^i \longmapsto C^i + x C^j$ "Al posto della colonna i metto la colonna i + x volte la colonna j"

(C2) $C^i \longmapsto \lambda C^i$ "Moltiplico la colonna i per uno scalare $\lambda \neq 0$".

OSS: Effettuare operazioni C^1, C^2, C^3 su una matrice A è come effettuare le stesse operazioni sulle righe di A^t.

$A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$A \xrightarrow{C^i \leftrightarrow C^j} B \qquad A \xrightarrow{C^i \mapsto \lambda C^i} B \qquad A \xrightarrow{C^i \mapsto C^i + x C^j} B.$$

$$A^t \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B^t \qquad A^t \xrightarrow{R_i \mapsto \lambda R_i} B^t \qquad A^t \xrightarrow{R_j \mapsto R_j + x R_i} B^t$$

<u>Es</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C^1 \leftrightarrow C^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C^1 \mapsto C^1 - 2C^1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(C1): $A \xrightarrow{C^i \leftrightarrow C^j} B \Rightarrow A^t \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B^t \Rightarrow B^t = P_{ij} A^t$

$$\Rightarrow \quad B = (B^t)^t = (P_{ij} A^t)^t = (A^t)^t P_{ij}^t = A P_{ij}$$

$P_{ij}^t = P_{ij}$ (Esercizio).

(C2) $$A \xrightarrow{c^i \mapsto \lambda c^i} B$$

$$A^t \xrightarrow{R_i \mapsto \lambda R_i} B^t \Rightarrow$$

$$\boxed{D_i(\lambda)^t = D_i(\lambda)}$$

$$B^t = D_i(\lambda) A^t$$

$$\Rightarrow B = (B^t)^t = (D_i(\lambda) A^t)^t = A\, D_i(\lambda)$$

(C3) $$A \xrightarrow{c^i \mapsto c^i + x c^j} B$$

$$A^t \xrightarrow[R_i \mapsto R_i + c R_j]{} B^t \Rightarrow B^t = F_{ij}(c) A^t$$

$$\boxed{F_{ij}(x)^t = F_{ji}(x)}$$

$$\Rightarrow B = (F_{ij}(x) A^t)^t = A\, F_{ij}(x)^t = A\, F_{\underline{j}\,\underline{i}}(x)$$

OSS: $A \underset{c}{\rightsquigarrow} B \Rightarrow \operatorname{Im}(S_A) = \operatorname{Col} A = \operatorname{Col}(B) = \operatorname{Im} S_B$.

Es:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ F_{21}(x)}}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a+bx & b \\ c+dx & d \end{pmatrix} \overset{C^1 + xC^2 \mapsfrom C^1}{\leftsquigarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{12}(x)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ xa+c & xb+d \end{pmatrix} \overset{R_2 + xR_1 \mapsfrom R_2}{\leftsquigarrow} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Rango-riga

sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ definiamo

$$Row(A) = Span(A_1, \dots, A_m) \subset Mat_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

lo spazio delle righe di A

Il rango-riga di A è dim Row(A)

$$Rrg(A) = \dim Row(A)$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Rrg(A) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Rrg(A) = 1$

oss: $Rrg(A) = rg(A^t)$. $\left({}^t : Mat_{m \times n}(\mathbb{K}) \to Mat_{n \times m}(\mathbb{K}) \right.$ è un isom. lineare).

OSS: $A \underset{R}{\leadsto} B \Rightarrow \mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B)$

$$\Rightarrow \mathrm{Rrg}(A) = \mathrm{Rrg}(B).$$

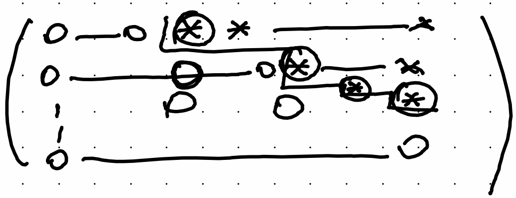
$A \underset{C}{\leadsto} B \Rightarrow \mathrm{Row}(A) \neq \mathrm{Row}(B)$ in generale.

Teorema: Sia $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t)$$

In particolare, $\mathrm{Rrg}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

dim: Supponiamo che $A = S$ sia a scala.

$A = S =$ 

$\circledast$ = pivot

Def: Il pivot di una riga di una matrice è il primo elemento non nullo.

$$S = \begin{pmatrix} \circledast & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \circledast & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \circledast & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \circledast & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \circledast \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

$S_2 \notin \langle S_1 \rangle$.

$S_3 \notin \langle S_1, S_2 \rangle$

$S_4 \notin \langle S_1, S_2, S_3, S_4 \rangle$

$\Rightarrow \quad Rrg(S) = 4 = rg(S).$

colonne dominanti di S = colonne che contengono i pivot di S.

$\Rightarrow \quad Rrg(S) = rg(S) = \#$ pivot di S.

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

$$A \underset{R}{\rightsquigarrow} S \text{ : a scala}$$

$$\Rightarrow \quad rg\, A = rg\, S = Rrg\, S = rg\, S^t \underset{\uparrow}{=} rg\, A^t$$

$$A^t \underset{C}{\rightsquigarrow} S^t \qquad\qquad Col(A^t) = Col(S^t)$$

$\blacksquare$

Calcolo del determinante

Teorema: Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. $\det(A) = \det(A^t)$.

dim: Per il Teorema precedente, $rg\, A = rg\, A^t$.

Quindi $\det A = 0 \iff rg\, A < n \iff rg\, A^t < n \iff \det A^t = 0$.

Supponiamo che A e A^t siano invertibili.

Allora A è prodotto di matrici elementari

$$A = E_1 \cdots E_K$$

$$\det A = \det E_1 \cdots \det E_K.$$

$$A^t = E_K^t \cdots E_1^t$$

$$\det A^t = \det E_1^t \cdots \det E_K^t.$$

Vediamo che se E è una matrice elementare allora $\det E^t = \det E$.

$$\left.\begin{aligned} P_{ij}^{\,t} &= P_{ij} \\ D_i(\lambda)^t &= D_i(\lambda) \\ F_{ij}(c)^t &= F_{ji}(c) \end{aligned}\right] \Rightarrow \det E = \det E^t \quad \forall \text{ matrice elementare } E.$$

$\boxtimes$

<u>COR</u>: Esiste un'unica f.ne $g: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilineare e alternante sulle colonne e t.c. $g(\mathbb{1}_n) = 1$.
Tale funzione coincide con il determinante.

<u>dim</u>:

Prop.: $g: \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ è multilineare e alternante sulle colonne

$$\Updownarrow$$

(C1) $g(AP_{ij}) = -g(A)$

(C2) $g(AD_i(\lambda)) = \lambda g(A)$

(C3) $g(AF_{ji}(x)) = g(A)$.

dim (Appunti).

Consideriamo la funzione

$$g : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

definita da

$$g(A) := \det(A^t)$$

(C1) $g(AP_{ij}) = \det((AP_{ij})^t) = \det(P_{ij}A^t) = -\det A^t = -g(A)$

(C2) $g(AD_i(\lambda)) = \det((AD_i(\lambda))^t) = \det(D_i(\lambda)A^t) = \lambda \det A^t = \lambda g(A)$

(C3) $g(AF_{ji}(x)) = \det(F_{ij}(x)A^t) = \det A^t = g(A)$

$g(\mathbb{1}_n) = \det(\mathbb{1}_n^t) = \det \mathbb{1}_n = 1.$

$\Rightarrow$ Esiste una f.ne multilineare e alternante sulle colonne che vale 1 su $\mathbb{1}_n$.

Unicità: Sia g una tale funzione.

Poniamo $f(A) = g(A^t)$

allora f è multilineare e alternante sulle righe e vale 1 su $\mathbb{1}_n$.

Quindi $f = \det \Rightarrow g(A) = \det(A^t)$.

Poiché $\det A^t = \det A \quad \forall A$, otteniamo

$$g = \det. \qquad \blacksquare$$

Possiamo operare sulle colonne per calcolare il determinante.

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Es:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-2\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$