Il determinante

Il determinante $(n \times n)$ è una funzione

$$f : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

(per ogni $n \geq 1$) con certe proprietà.

Quindi è una f.ne di n^2 variabili.

Es: $f : Mat_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = abcd$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-c$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$$

Possiamo considerare f come funzione delle righe della matrice, ovvero

$$f : \underbrace{Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times Mat_{1\times n}(\mathbb{K})}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$f(A) = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

oppure come funzione delle colonne della matrice

$$f : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{K}$$

Es:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f(a, b, c, d)$$

$$= f((a,b),(c,d)) = f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

Cenni di algebra multilineare

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, sia $n \geq 1$ un intero.

Una funzione

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$$

$$f(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K} \quad v_1, \dots, v_n \in V$$

si dice <u>multilineare</u> se è "lineare in ogni variabile vettoriale", i.e.

$\forall i = 1, \dots, n$, $\forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \in V$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall u, w \in V$

Es: Se $n = 1$ multilineare = lineare

·) $n = 2$, $V = \mathbb{K}$. Sia

$f : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

: bilineare (= multilineare in 2 variabili vettoriali)

$f(x, y)$. Fissiamo $y \in \mathbb{K}$

$f(-, y) : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \mapsto f(x, y)$

$f(x, y) = a(y)\, x$

$a(y) = b\, y$

$f(x, y) = b\, x\, y$

·) $f : \underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n} \to \mathbb{K}$ multilineare

$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha\, x_1 x_2 \cdots x_n$

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha u + \beta w, v_{i+1}, \dots, v_n) = \alpha\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n) +$$

$$+ \beta\, f(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

Def: Sia $n \geq 1$ intero.
Una funzione $f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ si dice <u>multilineare sulle righe</u> se

$$f: \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K}) \times \dots \times \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

è multilineare come f.ne delle righe.

·) f si dice multilineare sulle colonne se

$$f: \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

è multilineare come f.ne delle colonne.

<u>OSS</u>: $f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ come f.ne delle n^2 variabili scalari sarebbe multilineare solo se avesse la forma

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha \prod_{i,j} a_{ij}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\, abcd.$$

<u>Es</u>: $f_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$

$f_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = abcd$

$f_3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-c$

$f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$

	Multilineare sulle righe?	Multilineare sulle colonne?
f_1	<u>NO</u>! $f_1\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=1\neq 0$	<u>NO</u>!: $f_1\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=1\neq 0$
f_2	<u>NO</u>! $f_2\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}=4\neq 2f_2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$	<u>NO</u>!
f_3	NO	NO
f_4	SI	SI

$$f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$$

è multilineare sulle righe:

$$f_4\big(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d)\big) =$$

$$= f_4\begin{pmatrix} \alpha a+\beta a' & \alpha b+\beta b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha a+\beta a')d - (\alpha b+\beta b')c$$

$$= \alpha(ad-bc)+\beta(a'd-b'c)$$

$$= \alpha\, f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\beta\, f_4\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$$

quindi f_4 è lineare nella prima riga.

$$f_4\big((a,b),\alpha(c,d)+\beta(c',d')\big)$$

$$= f_4\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c+\beta c' & \alpha d+\beta d' \end{pmatrix}$$

$$= a(\alpha d+\beta d') - b(\alpha c+\beta c')$$

$$= \alpha(ad-bc)+\beta(ad'-bc')$$

$$= \alpha\, f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\beta\, f_4\begin{pmatrix} a & b \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

e quindi è lineare nella seconda riga.

f_4 è bilineare sulle righe.

<u>Esercizio</u>: Dimostrare che f_4 è bilineare sulle colonne.

<u>OSS</u>: $f: V\times\dots\times V \to \mathbb{K}$ multilineare $\Rightarrow f(v_1,\dots,0_r,\dots,v_n)=0$.

Def: Una funzione

$f: V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$

si dice <u>alternante</u> se

$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$

non appena $\exists\, i \neq j$ t.c. $v_i = v_j$.

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - c$

è alternante sulle righe:

$f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a - a = 0$

f non è alternante sulle colonne

$f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

Def: $f: \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ si dice <u>alternante sulle righe</u> se vale zero sulle matrici che hanno due righe uguali.

f si dice <u>alternante sulle colonne</u> se vale zero sulle matrici che hanno due colonne uguali.

Es: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$f\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ab = 0$

$f\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$

$\Rightarrow$ f è alternante sia sulle righe che sulle colonne.

Lemma 1:

Sia $f: V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$ una funzione che cambia segno quando si scambiano due variabili, ovvero

$$f(v_1, \dots, \overset{i}{v_i}, \dots, \overset{j}{v_j}, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, \overset{i}{v_j}, \dots, \overset{j}{v_i}, \dots, v_n)$$

Allora f è alternante.

dim:

$$f(v_1, \dots, \overset{i}{v}, \dots, \overset{i}{v}, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow f(v_1, \dots, v, \dots, v, \dots, v_n) = 0 \quad \blacksquare$$

OSS: Il viceversa è falso.

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-c)b$$

è alternante sulle righe

$$f\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 = 4, \quad f\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$$

Lemma 2:

Sia $f: V \times \dots \times V \to \mathbb{K}$ una funzione multilineare. Allora f è alternante se e solo se f cambia segno quando si scambiano due variabili.

$\blacksquare$

Prop.: Sia $f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

f è multilineare sulle righe e alternante sulle righe

$$\Updownarrow$$

(R1) $f(P_{ij}A) = -f(A)$

(R2) $f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A)$

(R3) $f(F_{ij}(c)A) = f(A)$

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\forall i \neq j$, $\forall \lambda \neq 0$, $\forall c \in \mathbb{K}$.

$\blacksquare$

Teorema / Definizione

Esiste un'unica funzione $f: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilineare sulle righe, alternante sulle righe, $f(\mathbb{1}_n) = 1$.

Tale funzione si chiama **determinante** $(n\times n)$ e si denota con $\det = \det^{(n)}$.

MATLAB: det.

dim:

Parte 1: esistenza.

Parte 2: unicità.

Parte 1: Per ogni $n \geq 1$ definiamo una f-ne

$$d^{(n)} : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

che è multilineare e alternante sulle righe e

$$d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1,$$

induttivamente come segue:

$$d^{(1)} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

$$d^{(1)} := Id_{\mathbb{K}} \quad d^{(1)}(x) = x.$$

Notazione: Data $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$

Sia $k \in \{1, \dots, n\}$ denotiamo con A_{k1} la matrice ottenuta da A rimuovendo la riga k e la colonna 1.

Es: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (d)$$

$$A_{21} = (b)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Def: Per ogni $n \geq 1$ definiamo $d^{(n)}$ come

$d^{(1)} = Id_K$

per $n \geq 2$

$$d^{(n)}(A) = a_{11}\, d^{(n-1)}(A_{11}) - a_{21}\, d^{(n-1)}(A_{21}) + a_{31}\, d^{(n-1)}(A_{31}) - a_{41}\, d^{(n-1)}(A_{41}) + a_{51}\, d^{(n-1)}(A_{51}) - \dots$$

$$= \sum_{K=1}^{n} (-1)^{K+1} a_{K1}\, d^{(n-1)}(A_{K1})$$

Es:

$$d^{(2)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\, d^{(1)}(d) - c\, d^{(1)}(b)$$

$$= ad - bc$$

$$d^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 1\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 7\, d^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= 1(36-48) - 2(18-24) + 7(12-12)$$

$$= -12 + 12 = 0$$

Teorema (esistenza del det.)

$d^{(n)}$ è multilineare e alternante sulle righe, $d^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$.

dim: Dobbiamo dimostrare

$$d^{(n)}(P_{ij}A) = -d^{(n)}(A)$$

$$d^{(n)}(D_i(\lambda)A) = \lambda\, d^{(n)}(A)$$

$$d^{(n)}(F_{ij}(c)A) = d^{(n)}(A).$$

$\blacksquare$

Teorema (unicità)

$d^{(n)}$ è l'unica f.ne con queste proprietà.