Riepilogo sui sistemi lineari

Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ e sia $b \in \mathbb{K}^m$.

L'equazione matriciale

$$AX = b \quad (*)$$

(nella variabile vettoriale $X \in \mathbb{K}^n$) si chiama un sistema di m equazioni lineari in n incognite.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$(*)$ si scrive (in $\mathbb{K}^m$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una soluzione è un vettore $\overline{X} \in S_A^{-1}(b) =$ controimmagine di b

$= \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = b\}$.

Teorema di struttura

Se $b = S_A(X_0) \in \operatorname{Im} S_A$ allora

$$S_A^{-1}(b) = X_0 + \operatorname{Ker} A$$

$$= X_0 + \langle v_1, \dots, v_{n-r} \rangle$$

dove $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} A} = (v_1, \dots, v_{n-r})$

Teorema di Rouché-Capelli

Il sistema $AX=b$ è risolubile, ovvero $S_A^{\to}(b)\neq\emptyset$

$\Updownarrow$

$rg(A) = rg(A|b)$

Come si risolvono i sistemi lineari?
Con l'algoritmo di Gauss:

a) $(A|b) \underset{R}{\rightsquigarrow} S$: matrice a scala

2 possibilità:

1. b è una colonna dominante
2. b non è una colonna dominante.

Se vale 1 allora $AX=b$ non è risolubile.

b) Se vale 2 allora $AX=b$ è risolubile:

$(A|b) \overset{R}{\rightsquigarrow} rref(A|b)=(R|d)$

$AX=b$ è equivalente al sistema a scala ridotta $RX=d$

Prop.: Se $(A|b) \underset{R}{\rightsquigarrow} (R|d)$ allora i sistemi

$AX=b$ e $RX=d$

hanno le stesse soluzioni.

dim:

$\exists\, C$ invertibile t.c.

$C(A|b) = (R|d)$

quindi

$CA = R \;, \; Cb = d$

Sia $\overline{X} \in S_A^{-1}(b)$.

$R\overline{X} = (CA)\overline{X} = C(A\overline{X})$

$= Cb = d$

Sia $\overline{X} \in S_R^{-1}(d)$ allora

$A\overline{X} = (C^{-1}R)\overline{X} = C^{-1}(R\overline{X}) =$

$= C^{-1}d = b$

I sistemi a scala ridotta sono immediatamente risolubili:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 5x_6 = 1 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_6 = 2 \\ x_5 + 3x_6 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 3 & \boxed{0} & 5 & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 4 & 2 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 3 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ x_1 & & x_3 & & x_5 & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 + 5x_6 = 1 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_6 = 2 \\ x_5 + 3x_6 = 3 \end{cases}$$

Esplicitiamo le variabili dominanti o dipendenti:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_3 = 2 - 2x_4 - 4x_6 \\ x_5 = 3 - 3x_6 \end{cases}$$

Soluzioni =

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2x_2 - 3x_4 - 5x_6 \\ x_2 \\ 2 - 2x_4 - 4x_6 \\ x_4 \\ 3 - 3x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \;\middle|\; x_2, x_4, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= X_0} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= \operatorname{Ker} R}$$

X_0 si ottiene ponendo $x_2 = x_4 = x_6 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{MATLAB} \\ X_0 = A \backslash b \end{array}}$$

Es: Studiare il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+k(k-1)x_4+(k+3)x_5 = 5-k \\ 2x_1+4x_2+x_3+k(k-1)x_4+(k+3)x_5 = 6 \\ 4x_1+8x_2+x_3+k(k-1)x_4+(k+5)x_5 = 10 \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & k(k-1) & k+3 & 5-k \\ 2 & 4 & 1 & k(k-1) & k+3 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & k(k-1) & k+5 & 10 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & k(k-1) & k+3 & 5-k \\ 0 & 0 & -3 & -k(k-1) & -(k+3) & -4+2k \\ 0 & 0 & -7 & -3k(k-1) & -3k-7 & -10+4k \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & -3 & -K(K-1) & -(K+3) & -4+2K \\ 0 & 0 & -7 & -3K(K-1) & -3K-7 & -10+4K \end{array}\right)$$

$$\underset{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & -3 & -K(K-1) & -(K+3) & -4+2K \\ 0 & 0 & -1 & -K(K-1) & -K-1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \end{array}\right)$$

Il sistema é risolubile se e solo se $K \neq 0$.

Supponiamo $K \neq 0$. Se $K \neq 1$ ($e\ K \neq 0$)

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 4-2K \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right)$$

$5-K-1-K$

$2-(1+K)$

$K+3-\frac{K(K-1)}{K-1}=$

$K+1-\frac{K(K-1)}{K-1}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right) = \mathrm{rref}(A|b)$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1-K \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{K-1} & \frac{1+K}{K(K-1)} \end{array}\right) = \mathrm{rref}(A|b)$$

Il sistema è equivalente al sistema a scala ridotta

$$\begin{cases} X_1 = 2 - 2X_2 - X_5 \\ X_3 = 1-K - X_5 \\ X_4 = \frac{1+K}{K(K-1)} - \frac{1}{K-1} X_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = -2X_2 - X_5 \\ X_3 = -X_5 \\ X_4 = -\frac{1}{K-1} X_5 \end{cases}$$

Soluzioni:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1-K \\ \frac{1+K}{K(K-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-K \\ 0 \\ 1-K \\ -1 \\ K-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

soluzioni di questo.

$X_2 = 1$, $X_5 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 0$, $X_5 = K-1$

MATLAB:
```
syms K
X0 = A\b
null(A)
```

Caso 2 : $K = 1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & K(K-1) & K+3 & 5-K \\ 0 & 0 & 1 & K(K-1) & K+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2K(K-1) & 2K & 2+2K \end{array}\right) \overset{K=1}{\underset{!}{=}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\leadsto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\leadsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

Il sistema per $k=1$ è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -2 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Le soluzioni per $k=1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \underset{\substack{x_2=1 \\ x_4=0}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{x_2=0 \\ x_4=1}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Il determinante

Cenni di algebra multilineare

Siano $V_1, \dots, V_n, W$ degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
Una funzione

$$f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

si chiama <u>multilineare</u> se è lineare in ognuna delle n variabili, i.e.

$\forall i = 1, \dots, n$
$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2,$
$\dots \forall u, v \in V_i, \dots, v_n \in V_n$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha u + \beta v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

$$= \alpha f(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

$$+ \beta f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n) \in W$$

<u>Es</u>: $V_1 = V_2 = \dots = V_n = \mathbb{K} = W$
$n = 2$.
$f : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$
$f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ è multilineare per

$f(x, y) = a\,xy$ qualche $a \in \mathbb{K}$