Nome, Cognome e Matricola

Esercitazione

21 Dicembre 2021

Esercizio 1. *Mettiamoci in* $\mathbb{R}^2$ *dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia* $Q = (1,2)^t$. *Trovare il punto* R *ottenuto ruotando* Q *di* $30°$ *in senso anti-orario attorno al punto* $P = (2,2)^t$.

2. *(1 punto) Sia* $P = (2,3)^t$. *Trovare il punto* R *ottenuto riflettendo ortogonalmente* P *attraverso la retta* $r : 2x + 3y = 1$.

3. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane dell'asse del segmento di vertici* $A = (-1,2)$ *e* $B = (3,-1)$.

4. *(1 punto) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza* $\mathcal{C}$ *di equazione* $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$ *e trovare la retta tangente a* $\mathcal{C}$ *nel punto* $P = \frac{1}{4}(9, 3\sqrt{3} - 8)^t$.

5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto* $P = (3,2)^t$ *e la retta* $r : 2x - y = 1$.

6. *(2 punti) Sia* $r : 2x + y = 1$ *e* $P = (2,2)^t$. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle due rette* r_1 *ed* r_2 *passanti per* P *e che formano un angolo di* $\pi/4$ *con* r. *Posto* $P_1 = r \cap r_1$ *e* $P_2 = r \cap r_2$ *calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici* P, P_1 *e* P_2.

Esercizio 2. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette*

$$r : \begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x+2y+z=6 \end{cases} \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

   senza cambiare la loro forma.

2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano:*

$$r : \begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

   senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (1,2,1)^t$ e $P_3 = (2,2,1)^t$.*

4. *(1 punto) Consideriamo le due rette $r = (3,-1,2)^t + \langle (1,1,0)^t \rangle$ e $s = (0,5,2)^t + \langle (1,-2,1)^t \rangle$. Dimostrare che r ed s sono sghembe e trovare il piano π contenente r e parallelo a s.*

5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (1,1,1)^t$, $P_2 = (1,-1,2)^t$ e $P_3 = (-2,1,1)^t$.*

6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette $r = (1,1,1)^t + \langle (1,2,-1)^t \rangle$ ed $s = (1,2,3)^t + \langle (2,-1,1)^t \rangle$*

7. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (1,2,3)^t$ ed il piano $\pi : 2x+3y-z=2$.*

Esercizio 3. *Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice 3×3*

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.*
2. *Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante $\mathcal{B}$, una matrice B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}A_kB = D$.*
4. *Per i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile, trovare una matrice ortogonale B ed una matrice D tali che $B^tAB = D$.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(1 punto) Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica funzione lineare tale che*

   $$f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3, \quad f(v_2) = 3v_1 - v_2 + 4v_3, \quad f(v_3) = -v_1 + 5v_2 - 6v_3.$$

   Trovare la matrice associata ad f *nella base* $\mathcal{B}$*. Chiamarla* A*.*
3. *(3 punti) Trovare la matrice associata ad* f *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$*. Chiamarla* C*.*
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di* f*.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di* f*.*

Esercizio 5. 1. *Si consideri il polinomio* $p(X) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 - 1$. *Ridurre a forma canonica metrica e affine la conica* $\mathcal{C}_p$, *specificando i cambiamenti di coordinate.*

2. *Scrivere la seguente forma quadratica in due variabili come combinazione lineare di quadrati:* $q(X) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

3. *Trovare una base di Sylvester per la seguente forma quadratica in tre variabili* $q(X) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_1 + x_2)^2$.