Eq. parametriche e cartesiane

$U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{K}^m \qquad A = (v_1 | \dots | v_n) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$

$U = Col(A) = Im\, S_A \quad A \rightsquigarrow S$: a scala $\Rightarrow \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ col. ~~dom~~ dominanti

$\Rightarrow \quad U = \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r} \rangle$ Eq. parametriche di U

$\forall u \in U \ \exists!\ t_1, \dots, t_r \in \mathbb{K}$ t.c. $u = t_1 A^{j_1} + \dots + t_r A^{j_r}$.

$$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

$$\begin{array}{ccc} D_A : Mat_{1\times m}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \\ \| & & \| \\ \mathbb{K}_m & & \mathbb{K}_n \end{array}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D_A((a,b)) = \underset{1\times \cancel{2}}{(a,b)} \underset{\cancel{2}\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} =$

$= (a+4b,\ 2+5b,\ 3a+6b)$

Se $\{X_1, \dots, X_k\} \subset Mat_{1\times m}(\mathbb{K})$ è una base di $\operatorname{Ker} D_A$

Allora

$$Col(A) = \{ Y \in \mathbb{K}^m \mid X_i Y = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \}.$$

$Col(A)$ è definito da k equazioni.

$$k = \dim \operatorname{Ker} D_A = m - rg(D_A) = m - rg(A^t) = m - rg(A).$$
$$= m - \dim Col(A).$$

Se $U \subset \mathbb{K}^m$ s.sp. vett. di dimensione r, allora U è descritto da $m-r$ equazioni lineari omogenee.

$U \subset \mathbb{K}^3$ e $\dim U = 1 \Rightarrow$ 2 equazioni in 3 variabili

$U \subset \mathbb{K}^4$ e $\dim U = 1 \Rightarrow$ 3 equazioni in 4 variabili

$U \subset \mathbb{K}^m$ e $\dim U = r \Rightarrow m-r$ equazioni in m variabili.

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Ker}((1,2,3)) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Le eq. cart. di U sono.

$$U : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_{A^t}"] \arrow[d, "()^t"', "\simeq"] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\simeq"', "()^t"] \\ \mathbb{K}_m \arrow[r, "D_A"'] & \mathbb{K}_n \end{tikzcd}$$

S_{A^t} e D_A sono simili.

Prop.: Sia $C \in Mat_{m \times m}(\mathbb{K})$ invertibile e sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$rg(CA) = rg(A)$$

dim:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "S_A"] \arrow[rr, bend right, "S_{CA}"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "S_C", "\simeq"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Sia $\mathcal{B} = \{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ una base di $Col(A)$.

$S_C(\mathcal{B}) = \{CA^{j_1}, \dots, CA^{j_r}\} \subset \mathbb{K}^m$ è lin. ind. perché C è iniettiva.

$\langle S_C(\mathcal{B}) \rangle \subseteq Im(CA) \Rightarrow rg(A) = r \leq rg(CA)$.

$\langle S_C(\mathcal{B}) \rangle$

Sia $X \in Im(CA)$. Allora $X \in \langle CA^1, \dots, CA^n \rangle$

$$X = y_1 CA^1 + \dots + y_n CA^n = C(y_1 A^1 + \dots + y_n A^n) = C(t_1 A^{j_1} + \dots + t_r A^{j_r})$$

Co-fattori:

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, $1 \leq i, j \leq n$. Il cofattore (i,j) di A è il numero

$$C_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C_{2,3}(A) = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = +6$$

K-minore:

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sia $1 \leq K \leq \min(m,n)$.

Un <u>K-minore</u> di A è il determinante di una sottomatrice $K\times K$ di A della forma

$$A([i_1,\dots,i_K],[j_1,\dots,j_K])$$

Il K-minore è

$$\det A([i_1,\dots,i_K],[j_1,\dots,j_K]).$$

Ci sono $\binom{m}{K}\binom{n}{K}$ K-minori.

Teorema degli orlati (o di Kronecker)

$\mathrm{rg}\,A = r \iff$ 1) $\exists$ r-minore $\neq 0$

2) Ogni $(r+1)$-minore ottenuto orlando l'r-minore di 1) è zero.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

$1 = \det A([1],[1])$

$-3 = \det A([1,2],[1,2]) \neq 0$

$\mathrm{rg}\,A = 2 \iff \begin{cases} \det A([1,2,3],[1,2,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = 0 \\ \det A([1,2,4],[1,2,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \cancel{1}2 & \\ 0 & -9 & \cancel{8} \end{pmatrix} = 0 \quad \cancel{\neq 0} \end{cases}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 0 & 5 & 1000 \\ 0 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det A([1,2,3],[1,2,3]) = 45 \Rightarrow \mathrm{rg}\,A = 3.$

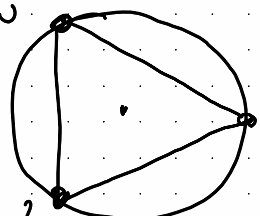
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k & k^2 & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$\det A([1],[1]) = 1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 1.$

$\det A([1,2],[1,2]) = k^2 - k^2 = 0 \qquad \det A([1,2],[1,3]) = 1-k^3$

$\det A([1,3],[1,2]) = 1-k^3 \qquad \det A([1,3],[1,3]) = k - k^4 = k(1-k^3)$

Se $1-k^3 = 0$ allora $\operatorname{rg} A = 1$



Se $1-k^3 \neq 0$ allora $\det A([1,2],[1,3]) = 1-k^3 \neq 0.$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A \geq 2.$ $\quad \det A([1,2,3],[1,2,3]) = \det \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 0 & 1-k^3 \\ k^2 & 1 & k \end{pmatrix}$

$= -(1-k^3) \det \begin{pmatrix} 1 & k \\ k^2 & 1 \end{pmatrix} = -(1-k^3)^2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$

Da Eq. cart. a parametriche

$U = \operatorname{Ker} A$ (Eq. cartesiane)

Per trovare eq. par. dobbiamo trovare una base di Ker A

$$A \underset{\text{righe}}{\rightsquigarrow} R = \operatorname{rref}(A)$$

$$\operatorname{Ker} A \underset{!}{=} \operatorname{Ker} R = \langle \text{soluzioni-base} \rangle \qquad \text{Eq. parametriche.}$$

$$U = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}}_{\text{a scala ridotta}} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

variabili libere

Eq. par.
$$\begin{cases} x_1 = -2t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

$\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ è lin. ind. ?

Fissiamo una base $\mathcal{B} \subset V$.

$\mathcal{I}$ è lin. Ind. $\Leftrightarrow$ $F_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}) = \{F_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(v_k)\} \subset \mathbb{K}^n$ è lin. Ind.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}\left(F_{\mathcal{B}}(v_1) | \dots | F_{\mathcal{B}}(v_k)\right) = k$.

$v_1 = 1 + x + x^2$ $\quad v_2 = 1 - x + x^2$ sono lin. ind. ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}\, A = 2$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ è lin. Ind.

Forma cartesiana di un s.sp. vettoriale di $\mathbb{K}^m$

$U \subset \mathbb{K}^m$ Una forma cartesiana di U è un modo di rappresentare U come il nucleo di una matrice

$U = \mathrm{Ker}\, B$. dove B è una matrice di taglia $k \times m$.

dove $k = m - \dim U$.

$U = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ $\dim U = r$.

$$A = (v_1 | \dots | v_r) \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \hline \vdots \\ \hline v_r^t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Ker}\, A^t \ni \mathcal{B} = \{ X_1, \dots, X_k \} \Rightarrow B := \begin{pmatrix} X_1^t \\ \hline \vdots \\ \hline X_k^t \end{pmatrix}$$

$$U = \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Ker}\, B.$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4$$

Eq. cart. per U ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

var. libere

a scala ridotta

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \operatorname{Ker} B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$U : \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>Eq. cartesiane di U.</u> | <u>Forma cartesiana di U</u>.

"è l'insieme delle soluzioni del sistema"

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad (U = \mathbb{R}^2).$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \right\rangle \quad \underline{\text{Eq. par.}}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \{0_{\mathbb{R}^2}\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

$$U : \quad 0x_1 + 0x_2 = 0 \qquad \underline{\text{Eq. cart. di } U.}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

$U = \mathrm{Col}(A)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{rg}\, A = 2$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker}(A^t) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$U: \quad -x_1 + x_3 = 0$ <u>Eq. cart. di U</u>.

$U: \; BX = 0$

$W: \; CX = 0$

$$U \cap W: \begin{cases} BX = 0 \\ CX = 0 \end{cases}$$

Interpolazione polinomiale

Siano $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$F: \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$p(x) \longmapsto \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$$

~~Se~~ F è un isomorfismo lineare $\iff x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.

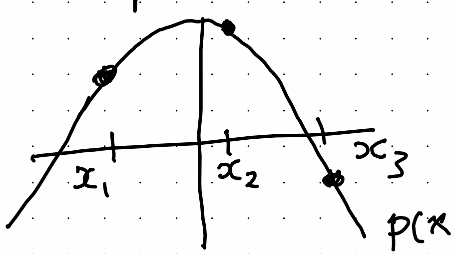
In questo caso

$$\forall \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \exists! \ p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} \ \text{t.c.}$$

$$p(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$p(x)$ si chiama il polinomio interpolatore degli n punti

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$



$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x]_{\leq n-1} \arrow[r, "="] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}} = F"'] & \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^n & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n)"]
\end{tikzcd}$$

$$F(p(x)) = Y = \mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n)^{-1} Y \leftarrow$$

Conviene farlo con Cramer:

$$a_i = \frac{1}{\det \mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n)} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_1^{i-1} & y_1 & x_1^{i+1} & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & y_2 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 1 & & x_n^{i-1} & y_n & x_n^{i+1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

commuta vuol dire $g \circ f = k \circ h$