Come scrivere matrici invertibili come prodotto di matrici elementari:

$$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \qquad A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow E_2 E_1 A \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow E_k \cdots E_1 A = R$$

$$E_k \cdots E_1 A = R \quad \Rightarrow \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

Se $R = \mathbb{1}_n$, allora $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

Poiché

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad F_{ij}(c)^{-1} = F_{ij}(-c).$$

si ha che A è prodotto di matrici elementari.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow D_1\left(\frac{1}{2}\right) A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow D_2\left(\frac{1}{3}\right) D_1\left(\frac{1}{2}\right) A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow F_{12}\left(-\frac{3}{2}\right) D_2\left(\frac{1}{3}\right) D_1\left(\frac{1}{2}\right) A = \mathbb{1}_2$

$\Rightarrow A = D_1(2) D_2(3) F_{12}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ✓

$$V_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} V_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} V_3$$

V_1, V_2 sono f.g.

$$\mathrm{rg}(\mathcal{L}_2) = \dim V_1 - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$$

$$\mathrm{rg}(\mathcal{L}_1) = \dim V_2 - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{L}_1$$

$$\mathrm{rg}(\mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1) = ?$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & V_3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_3}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

La matrice che rappresenta $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ nelle basi $\mathcal{B}_1$ (in partenza) e $\mathcal{B}_3$ (in arrivo) è

$$AB$$

"prodotto righe per colonne"

$V_1 \supset \mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\quad V_2 \supset \mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ $\quad V_3 \supset \mathcal{B}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$

$\mathcal{L}_2 : V_1 \longrightarrow V_2$

$v_1 \longmapsto 2w_1 - w_2 + w_3$

$v_2 \longmapsto w_1 - w_2$

$v_3 \longmapsto w_1 + w_3$

$\mathcal{L}_1 : V_2 \longrightarrow V_3$

$w_1 \longmapsto u_1 + u_2$

$w_2 \longmapsto u_2 + u_3$

$w_3 \longmapsto u_1 + u_3$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 (v_1) = \mathcal{L}_1 (2w_1 - w_2 + w_3) = 2(u_1 + u_2) - (u_2 + u_3) + (u_1 + u_3) = 3u_1 + u_2$

$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 (v_2) = \mathcal{L}_1 (\cancel{2}w_1 - w_2) = u_1 + u_2 - (u_2 + u_3) = u_1 - u_3$

$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 (v_3) = \mathcal{L}_1 (w_1 + w_3) = u_1 + u_2 + u_1 + u_3 = 2u_1 + u_2 + u_3$

$V_1 \twoheadrightarrow V_2 \hookrightarrow V_3$ non è nè iniettiva nè suriettiva.

$V_1 \hookrightarrow V_2 \twoheadrightarrow V_3$

Per calcolare il determinante

1) Utilizzare operazioni elementari sulle colonne o sulle righe per creare una colonna o una riga con tanti zeri.

2) Applicare ~~L~~aplace a quella colonna o quella riga.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = -10$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

3^a colonne

$$3 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$-2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Una f.ne lineare $\mathcal{L}: V \to W$ si dice un <u>isomorfismo lineare</u> se $\mathcal{L}$ è lineare, iniettiva e suriettiva.

1) <u>$\mathcal{L}$ manda basi in basi</u> ($\Longleftrightarrow$ <u>$\mathcal{L}$ è un isomorfismo lineare</u>)

Se $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\mathcal{L}(\mathcal{B}_V) = \{\mathcal{L}(v_1), \dots, \mathcal{L}(v_n)\}$ è una base di W:

Infatti,

1) <u>$\mathcal{L}(\mathcal{B}_V)$ è lin. Ind.</u>:

$$x_1 \mathcal{L}(v_1) + \dots + x_n \mathcal{L}(v_n) = 0_W \overset{\mathcal{L} \text{ lineare}}{\Longrightarrow} \mathcal{L}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = 0_W$$

$$\Longrightarrow x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}) \underset{\mathcal{L} \text{ è iniettiva}}{\Longrightarrow} x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0_V$$

$$\underset{\mathcal{B}_V \text{ è lin. Ind.}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

OSS: Se $\mathcal{L}: V \hookrightarrow W$ è lineare e iniettiva allora per ogni insieme lin. Ind. $\mathcal{I} \subset V$ si ha che $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ è ancora lin. Ind.

Quindi,
le f.ni lineari iniettive mandano insiemi lin. Ind. in insiemi lin. Ind.

2) $\mathcal{L}(\mathcal{B}_V)$ genera W : $\forall w \in W \ \exists \ y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$w = y_1 \mathcal{L}(v_1) + \dots + y_n \mathcal{L}(v_n)$$

Sia $w \in W \overset{\mathcal{L} \text{ è suriettiva}}{\ \exists!\ } v \in V$ t.c. $\mathcal{L}(v) = w$. Poiché $\mathcal{B}_V$ è una base di V $\exists \ y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ t.c. $v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$$\Rightarrow w = \mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) \underset{\mathcal{L} \text{ è lineare}}{=} y_1 \mathcal{L}(v_1) + \dots + y_n \mathcal{L}(v_n)$$

Siano $\mathcal{L}_2 : V_1 \longrightarrow V_2 \quad \mathcal{L}_1 : V_2 \longrightarrow V_3$.

Siano $\mathcal{B}_1 \subset V_1$, $\mathcal{B}_2 \subset V_2$, $\mathcal{B}_3 \subset V_3$ basi. ($\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$, $\dim V_3 = h$).

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, shift right, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_2 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[u, shift right, "F_{\mathcal{B}_1}^{-1}"'] \arrow[r, "S_A"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L}_2 \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

lineare

$$S_A = F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L}_2 \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1} \Rightarrow A^i = S_A(e_i) = F_{\mathcal{B}_2} \circ \mathcal{L}_2 \circ F_{\mathcal{B}_1}^{-1}(e_i)$$

$$\Rightarrow A^i = F_{\mathcal{B}_2}\left(\mathcal{L}_2(v_i)\right)$$

$\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$

A è la matrice che rappresenta $\mathcal{L}_2$ nelle basi $\mathcal{B}_1$ in partenza e $\mathcal{B}_2$ in arrivo.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_2"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"'] & V_2 \arrow[r, "\mathcal{L}_1"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & V_3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_3}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^h
\end{tikzcd}
$$

$$C = BA$$

"prodotto righe per colonne"

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\mathcal{B}_V"'] & W \arrow[d, "\mathcal{B}_W"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}
$$

$$\mathcal{B}_V = \{\underbrace{\ldots\ldots}_{v_1,\ldots,v_r}, \underline{\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}}}\}$$

$$\mathcal{B}_W = \{\mathcal{L}(v_1), \ldots, \mathcal{L}(v_r), \ldots\}$$

$$\left(e_1 | \ldots | e_r | 0 | \ldots | 0\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{L}\left(p(x)\right) = p(x+1) - p(x)$$

Unicità del determinante

$$A_{n\times n} \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow E_k \cdots E_1 A = R \text{ a scala ridotta.}$$

Siano $f, g : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[r, squiggly] & \cdots \arrow[r, squiggly] & E_r \arrow[dr, squiggly] & \\
A \arrow[ur, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & & \begin{matrix} c \\ \neq \\ d \end{matrix} & & R \\
 & F_1 \arrow[r, squiggly] & \cdots \arrow[r, squiggly] & F_k \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

$$f(P_{ij}A) = -f(A), \quad g(P_{ij}A) = -g(A)$$
$$f(D_i(\lambda)A) = \lambda f(A), \quad g(D_i(\lambda)A) = \lambda g(A)$$
$$f(F_{ij}(c)A) = f(A), \quad g(F_{ij}(c)A) = g(A)$$
$$f(\mathbb{1}_n) = 1 \quad g(\mathbb{1}_n) = 1$$

$$f(A) = c\, f(R) \quad \text{dove} \quad c = f(E_k) f(E_{k-1}) \cdots f(E_1)$$
$$= g(E_k)\, g(E_{k-1}) \cdots g(E_1)$$

$$f(R) = \left.\begin{cases} 0 & \text{se } R \text{ ha una riga nulla} \\ 1 & \text{se } R = \mathbb{1}_n \end{cases}\right\} = g(R)$$

$$f(A) = c\, f(R) = c\, g(R) = g(A).$$

Es sul cambiamento di base :

Sia $\mathcal{B}_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Sia $\mathcal{B}_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

1) Verificare che $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi

2) Si consideri la f.ne lineare $\mathcal{L}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\mathcal{L}(v_1) = 2w_1 + w_2 \quad , \mathcal{L}(v_2) = w_1 + 2w_2 \quad , \mathcal{L}(v_3) = w_1 - w_2 .$$

Trovare la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nelle basi standard.

<u>Sol.</u> : $\det(v_1 | v_2 | v_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= 2 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\det(w_1, w_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}
$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X \longmapsto B_1^{-1}X \longmapsto AB_1^{-1}X \longmapsto B_2AB_1^{-1}X$$

La matrice cercata è $\quad C = B_2 A B_1^{-1}$

Calcolìamo B_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = B_2 A B_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -2 & 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Estrazione di basi:

$\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V \qquad U = \langle \tau \rangle.$

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base di V.

$$F_{\mathcal{B}}(\tau) = \{F_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, F_{\mathcal{B}}(v_k)\} \subset \mathbb{K}^n$$

$$A = \left(F_{\mathcal{B}}(v_1) \,|\, \dots \,|\, F_{\mathcal{B}}(v_k) \right) \rightsquigarrow S \text{ a scala.}$$

$\Rightarrow$ Le colonne dominanti di A sono $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$.

$\Rightarrow$ $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$ è una base di U.

(perché $F_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo lineare).

$\mathcal{T} = \{ 2+x, 2-x, 3+4x, 7+5x \} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

$\mathcal{E} = \{1, x\}$.

$F_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & * & * \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A^1, A^2 sono le colonne dominanti di A

$\Rightarrow$ $\{2+x, 2-x\}$ è una base di $\langle \mathcal{T} \rangle$.

operazioni el. sulle colonne:

$$A \xrightarrow{C^i \leftrightarrow C^j} AP_{ij} \qquad \det(AP_{ij}) = -\det(A)$$

$$A \xrightarrow{C^i \mapsto \lambda C^i} AD_i(\lambda) \qquad \det(AD_i(\lambda)) = \lambda \det(A)$$

$$A \xrightarrow{C^i \mapsto C^i + \lambda C^j} AF_{ji}(\lambda) \qquad \det(AF_{ji}(\lambda)) = \det(A)$$

$f((a,b),(c,d)) = a+c$ NON è multilineare sulle righe

$$f(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d)) = f((\alpha a+\beta a', \alpha b+\beta b'),(c,d))$$
$$= \alpha a+\beta a'+c$$

$$\alpha f((a,b),(c,d))+\beta f((a',b'),(c,d)) = \alpha(a+c)+\beta(a'+c)$$
$$= \alpha a+\beta a'+(\alpha+\beta)c$$

Multilineare: $f(X_1,\dots,X_n) \in \mathbb{K}$. Multilineare:

$\forall i$

$$f(X_1,\dots,X_{i-1},\alpha X_i+\beta Y_i, X_{i+1},\dots,X_n) =$$
$$= \alpha f(X_1,\dots,X_{i-1},X_i,X_{i+1},\dots,X_n)+\beta f(X_1,\dots,X_{i-1},Y_i,X_{i+1},\dots,X_n)$$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $X_i, Y_i \in V_i$.

$f((a,b),(c,d)) = ac$ è multilineare sulle righe:

$$f(\alpha(a,b)+\beta(a',b'),(c,d)) = (\alpha a+\beta a')c$$

$$\alpha f((a,b),(c,d))+\beta f((a',b'),(c,d)) = \alpha(ac)+\beta(a'c) =$$
$$= (\alpha a+\beta a')c.$$

$\Rightarrow$ lineare nella prima variabile.

$$f((a,b),\alpha(c,d)+\beta(c',d')) = f((a,b),(\alpha c+\beta c',\alpha d+\beta d')) =$$
$$= a(\alpha c+\beta c')$$

$$\alpha f((a,b),(c,d))+\beta f((a,b),(c',d')) = \alpha(ac)+\beta(ac')$$
$$= a(\alpha c+\beta c')$$

$\Rightarrow$ Lineare nella 2^a variabile.