Lemma di scambio

$V \supset \tau = \{v_1, \dots, v_k\}$, $U = \mathrm{Span}(\tau)$ e

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \neq 0_V$$

Se $t_i \neq 0$,

$$\mathrm{Span}(\tau) = \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\}).$$

Es: $\tau = \{ \overbrace{1 - x}^{u_1 \,=}, \overbrace{1 + x}^{u_2 \,=} \} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 1} = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{K}\} = V$

$V = \mathrm{Span}(\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x})$ $\qquad u_1 = v_1 - v_2$

$\xRightarrow{\text{Lemma di scambio}}$ $V = \mathrm{Span}(u_1, v_2) \ni u_2$ $\xRightarrow{\text{Lemma scambio}}$ $V = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$.

$$u_2 = t_1 u_1 + t_2 v_2$$

Se $t_2 = 0$ allora $u_2 = t_1 u_1$ ovvero $1 - x = t_1(1 + x)$

$\Leftrightarrow t_1 = 1, t_1 = -1$ Assurdo! . Quindi $t_2 \neq 0$

Es: Dimostrare che $\mathbb{R}^2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$.

Sol.: $\forall\, X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$X = t_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Da dimostrare

Sappiamo che $\mathbb{R}^2 \underset{!!}{=} \text{Span}(e_1, e_2)$ dove $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$\underset{\text{Scambio}}{\Rightarrow}$ $\text{Span}(e_1, e_2) = \text{Span}(u_1, e_2) \ni u_2$

$\underset{t_2 \neq 0}{=} \text{Span}(u_1, u_2)$.

$u_2 = t_1 u_1 + \cancel{t_2} e_2 \qquad t_2 = 0$? No altrimenti u_2 sarebbe un multiplo di u_1. $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = t \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\quad t = 3,\ t = \frac{1}{2}$ ↯.

Lemma di dipendenza lineare

$\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ è lin. DIP.

$$\Updownarrow$$

$\exists\ i$ t.c. $v_i \in \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$

"v_i è combinazione lineare degli altri."

Es: Due vettori v_1 e v_2 sono lin. DIP

$$\Updownarrow$$

uno è multiplo dell'altro.

Es: $v_1 = 1+X$, $v_2 = 1-X$, $v_3 = 2 \in \mathbb{R}[x]$

sono lin. Dip.:

$$v_3 = v_1 + v_2 \iff v_1 + v_2 \underbrace{-}_{\neq 0} v_3 = 0_{\mathbb{R}[x]}$$

OSS: Se v_2 è multiplo di v_1 allora $\mathcal{I} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ è lin. DIP.

Infatti, se $v_2 = t v_1$ allora

$$t v_1 - v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_k = 0_V$$

è una relazione di dipendenza lineare perché il coefficiente di v_2 è $-1 \neq 0$.

Lemma di Indipendenza lineare

$\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ è lin. ~~DIP.~~ Ind.

$$\Updownarrow$$

~~$\exists\, i$ t.c. $v_i \in \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$~~

$\forall\, i = 1, \dots, k \quad , \; v_i \notin \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$

OSS: Se τ è lin. Ind., allora

$$\mathrm{Span}(\tau) \supsetneq \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\}) \qquad \forall i.$$

Es: $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. Ind.? $\boxed{SI}$.

Scriviamo $0_{\mathbb{R}^2}$ come loro combinazione lineare. Facciamo vedere che i coefficienti di questa combinazione lineare sono tutti nulli.

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} t_1 + 3t_2 \\ 2t_1 + t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} t_1 + 3t_2 = 0 \\ 2t_1 + t_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = -3t_2 \\ 2(-3t_2) + t_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 = -3t_2 \\ -5t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}.$$

Es: $v_1 = e^x,\ v_2 = e^{2x},\ v_3 = e^{3x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funzione} \}$

$0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$ è la funzione $0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

è la funzione costante uguale a zero.

$t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 = 0 : \quad t_1 e^x + t_2 e^{2x} + t_3 e^{3x} = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}(x)$

$$\begin{cases} t_1 e^x + t_2 e^{2x} + t_3 e^{3x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ t_1 e^x + 2 t_2 e^{2x} + 3 t_3 e^{3x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{matrix} t_2 e^{2x} + 2 t_3 e^{3x} = 0 \\ \forall x \\ 2 t_2 e^{2x} + 6 t_3 e^{3x} = 0 \end{matrix}$$

$$4 t_3 \underbrace{e^{3x}}_{\neq 0} = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad t_3 = 0$$

$$t_1 e^{x} + t_2 e^{2x} + t_3 e^{3x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x=0$ (A) $t_1 + t_2 + t_3 = 0$

$x=1$

(B) $t_1 e + t_2 e^2 + t_3 e^3 = 0$

$$\left\{ \begin{aligned} & t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ & t_2 (e^2 - e) + t_3 (e^3 - e) = 0 \end{aligned} \right.$$

(B) $-$ e (A)

Es: $v_1 = 1$, $v_2 = 1-x$, $v_3 = 1+x+x^2$

sono lin. Ind.

Sol.: $t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 = 0_{\mathbb{K}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$

$$t_1 + t_2(1-x) + t_3(1+x+x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$$(t_1 + t_2 + t_3) + (-t_2 + t_3)x + t_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ -t_2 + t_3 = 0 \\ t_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0.$$

Es: Sia $\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{K}[x]$.

Se $gr(v_i) = i \quad \forall i = 1, \dots, k$.

$\left(\text{Es} \quad \tau = \{1+x,\ 1-x+3x^2,\ 2x^2+x^3, \dots, 1+x+\dots+x^k\} \right)$.

allora τ è lin. Ind.

Sol.: $t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k = 0 + 0x + \dots + 0x^k$

x^k compare solo in $v_k \Rightarrow t_k = 0$

$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{k-1} v_{k-1} = 0 + 0x + \dots + 0x^{k-1}$

x^{k-1} compare solo in $v_{k-1} \Rightarrow t_{k-1} = 0$

continuando così otteniamo

$t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$. ∎

Teorema fondamentale sull' indip. lineare

$V = \mathrm{Span}(\tau)$, $\tau = \{v_1, .., v_k\}$.

Sia $S \subset V$ lin. Ind. . Allora $|S| \leq k$.

Applicazioni: $\tau = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 70 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

è lin. Dip.

Infatti, sappiamo che $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$.

Se τ fosse lin. Ind., il Teorema fondamentale dice che $|\tau| \leq 2$.

Es: $V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\tau = \{ v_1 + v_2 \, , \, 3v_1 - v_2 \, , \, v_2 + \pi v_3 \, , \, \sqrt{2} v_1 + v_2 - v_3 \}$

è lin. Dip. ?

Si, perché $|\tau| = 4 > 3 = |\{v_1, v_2, v_3\}|$.

Es: $V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ su $\mathbb{R}$.

$U = \langle v_1 + v_2 \rangle$, $W = \langle v_1 - v_2 \rangle$

$U \cap W = ?$ $U \cap W \subseteq U$, $U \cap W \subseteq W$.

$v \in U \cap W$ $v = t(v_1 + v_2) = s(v_1 - v_2)$ per qualche

$t, s \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $tv_1 + tv_2 = sv_1 - sv_2$

$\Rightarrow$ $(t-s)v_1 + (t+s)v_2 = 0_V$

1) Se $\{v_1, v_2\}$ è lin. Ind. allora $\begin{cases} t-s=0 \\ t+s=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=s \\ t=-s \end{cases} \Leftrightarrow$

$t = s = 0$ $\Leftrightarrow$ $v = 0_V$ $\Leftrightarrow$ $U \cap W = \{0_V\}$.

2) Se $v_2 = kv_1$ allora $v = (t + kt)v_1 = (s - ks)v_1$

$$v = (t+kt)v_1 = (s-ks)v_1$$

Se $v_1 = 0_V$, allora $v_2 = 0_V$ e $U \cap W = \{0_V\}$.

Se $v_1 \neq 0_V$ allora

$$t+kt = s-ks$$

Se $k=0$ $\quad t=s \quad$ e $\quad U \cap W = \langle v \rangle \overset{v \neq 0_V}{=} \langle v_1 \rangle$

Se $k \neq 1$ e $k \neq -1$

$$t(1+k) = s(1-k)$$

$$s = \frac{1+k}{1-k}\, t \qquad U \cap W = \langle v \rangle.$$

Se $k=1$ $\quad 2tv_1 = 0_V \Rightarrow v_1 = 0_V$ $\lightning$. oppure $t=0 \Rightarrow v=0$

$k=-1$

$\underline{Es}$: $\quad U = \langle u, v \rangle \supseteq W = \langle u+2v, v+3u \rangle$

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

Se $v_1, \dots, v_k \in U$ allora $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subset U$

$$v+3\cancel{u} - 3(\cancel{u}+2v) = -5v \in W$$

$$\Rightarrow v \in W$$

$$(u+2v) - 2(v+3u) = -5u \in W$$

$$\Rightarrow u \in W$$

$$\left.\begin{matrix} v \in W \\ u \in W \end{matrix}\right\} \Rightarrow U \subseteq W$$

$$\Rightarrow U = W.$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Span}(\mathcal{B}_1) \overset{\text{lemma di scambio.}}{=} \mathrm{Span}(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$$