Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 7
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 17 Novembre 2020

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice reale:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che A è invertibile.*
2. *Scrivere A come prodotto di matrici elementari.*
3. *Calcolare il determinante di ognuna di tali matrici elementari e verificare che il loro prodotto è uguale al determinante di A.*

1. $\det A = -8 \neq 0.$

2. $A \rightsquigarrow F_{12}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow F_{21}(-3)F_{12}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow D_2\left(-\frac{1}{8}\right)F_{21}(-3)F_{12}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow F_{12}(-2)D_2\left(-\frac{1}{8}\right)F_{21}(-3)F_{12}(1)A = \mathbb{1}_2$$

$$\Rightarrow A = F_{12}(-1)F_{21}(3)D_2(-8)F_{12}(2)$$

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot (-8) \cdot 1 = -8.$$

Esercizio 2. *1. Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

2. Si consideri la seguente matrice complessa:

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i & 1-i \\ 2i & -i & 2+2i \\ -2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda colonna;

(b) Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda riga.

2.b. $\det(B) = -2i \det\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & 3i \end{pmatrix} - i \det\begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ -2+i & 3i \end{pmatrix} +$

$- (2+2i) \det\begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ -2+i & 1+i \end{pmatrix} = \dots = 1-10i$

Esercizio 3. *Per ogni $n \geq 1$ si consideri la matrice $A(n)$ di taglia $n \times n$ la cui componente (i, j) è definita dalla formula*

$$A(n)_i^j = \begin{cases} 1 & se\ i < j \\ 2 & se\ i = j \\ 3 & se\ i > j \end{cases}$$

Calcolare $det(A(2020))$.

Sol.:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 \\ 3 & 3 & \cdots & & & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad n \times n.$$

$$\det A(n) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 3 & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 3 & & \\ \vdots & 3 & \boxed{A(n-2)} & \\ 0 & \vdots & & \end{pmatrix} = \det A(n-2).$$

$$\det A(1) = \det(2) = 2, \quad \det(A(2)) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \det A(2020) = 1.$$

Esercizio 4. *Siano $L_1 : V_1 \to V_2$ e $L_2 : V_2 \to V_3$ due funzioni lineari.*

1. *Dimostrare che $rg(L_2 \circ L_1) = rg(L_1)$ se L_2 è iniettiva.*
2. *Dimostrare che $rg(L_2 \circ L_1) = rg(L_2)$ se L_1 è suriettiva.*
3. *Esibire un esempio in cui $L_2 \circ L_1$ è un isomorfismo ma nè L_1 nè L_2 sono isomorfismi.*

Sol.: 1) $V_1 \xrightarrow{L_1} V_2 \xhookrightarrow{L_2} V_3$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base di $\operatorname{Im} L_1$. Allora

$L_2(\mathcal{B}) = \{L_2(v_1), \dots, L_2(v_r)\}$ è lin. ind. (perché L_2 è iniettiva) e genera $\operatorname{Im}(L_2 \circ L_1)$.

$\Rightarrow rg(L_2 \circ L_1) = \dim \operatorname{Im}(L_2 \circ L_1) = |L_2(\mathcal{B})| = |\mathcal{B}| = rg(L_1)$.

2) $V_1 \overset{L_1}{\twoheadrightarrow} V_2 \xrightarrow{L_2} V_3$

Sia $\mathcal{B}\{L_2(v_1), \dots, L_2(v_r)\}$ una base di $\operatorname{Im} L_2$.
Poiché L_1 è suriettiva, $v_i = L_1(w_i)$ $\forall\, i = 1, \dots, r$.

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{L_2 \circ L_1(w_1), \dots, L_2 \circ L_1(w_r)\} \subset \operatorname{Im} L_2 \circ L_1$

è una base di $\operatorname{Im} L_2 \circ L_1$.

3) $\mathbb{K} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{(1\ 0)} \mathbb{K}$

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$, *cio le funzioni reali definite sull'intervallo* $[0, 2\pi]$. *Sia*

$$W = \langle 1, \cos(x), \sin(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(x)\sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\rangle.$$

Dati n *punti* $x_1, \dots, x_n$ *in* $[0, 2\pi]$, *definiamo* $F : W \to \mathbb{R}^n$ *e* $G : \mathbb{R}^8 \to W$ *in questo modo:*

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} G(e_1) = 1 \\ G(e_2) = \cos(x) \\ G(e_3) = \sin(x) \\ \vdots \\ G(e_8) = \sin(2x) \end{array}.$$

Vogliamo trovare la dimensione di W *e esibire una base estratta dai generatori di* W.

1. *Trovare* 3 *relazioni di dipendenza lineare fra i generatori di* W *(sfruttando le regole della goniometria).*
2. *Mostrare che* F *una funzione lineare.*
3. *Sfruttando il suggerimento del primo punto, scegliere* 5 *punti* $x_1, \dots, x_5$ *e scrivere la matrice* A *associata alla funzione* $F \circ G$.
4. *Identificare le* 5 *colonne dominanti di* A *e calcolare il determinante della matrice aventi come colonne le colonne dominanti di* A. *Qual una base di* W *estratta dai generatori sopra indicati?*

Sol.: 1) $1 - \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$

$\cos(2x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) = 0$

$\sin(2x) - 2\cos(x)\sin(x) = 0$

2) F è la valutazione in n p.ti.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \pi \\ x_3 = \pi/2 \\ x_4 = \frac{3}{2}\pi \\ x_5 = \pi/4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & \cos & \sin & \cos^2 & \sin^2 & \cos\sin & \cos 2x & \sin 2x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{matrice delle} \\ \text{colonne dominanti} \end{array}$$

$$\det A_d = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow \{1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \cos x \sin x\}$ è lin. ind.

$\Rightarrow \dim W \geq 5$, $U = \langle 1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \cos x \sin x \rangle$.

$\underset{(1)}{\sin^2 x \in U}$, $\underset{(1)}{\cos(2x) \in U}$, $\underset{(1)}{\sin 2x \in U}$

$\Rightarrow U = W. \Rightarrow \dim W = \dim U = 5.$