Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 6

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 10 Novembre 2020

Esercizio 1. *Trovare la forma a scala ridotta di ognuna delle seguenti matrici e trovare le loro colonne dominanti. Verificare il risultato con MATLAB.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & -2 & -4 & 5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -4 & -3 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & -6 & 1 & -7 & 11 & 0 & 11 \\ -2 & 2 & -4 & 3 & -7 & 12 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *1. Descrivere tutte le possibili matrici 2×2 a scala ridotte.*

2. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ nei parametri reali a, b, c, d, trovare la sua forma a scala ridotta. (Ovviamente rref(A) dipende dalla scelta dei parametri, per cui bisogna considerare i diversi casi separatamente.)

Sol.:

1) $\underset{R_0}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \underset{R_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \underset{R_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}} \quad \underset{R_3}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

infinite forme a scale ridotta $* \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$a = b = c = d = 0 \;] \Longleftrightarrow R_0$

$ad - bc \neq 0 \;] \Longleftrightarrow R_3$

$\left.\begin{array}{l} ad - bc = 0 \\ a \neq 0 \text{ o } c \neq 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow R_1$

$\left.\begin{array}{l} ad - bc = 0 \\ a = 0 = c \\ b \neq 0 \text{ o } d \neq 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow R_2$

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa delle seguenti matrici, e verificare il risultato con MATLAB:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(B \mid \mathbb{1}_3) \rightsquigarrow (\mathbb{1}_3 \mid B^{-1})$$

$$(C \mid \mathbb{1}_3) \longrightarrow (\mathbb{1}_3 \mid C^{-1})$$

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $f : V \to V$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = v_1 + v_3, \quad f(v_3) = v_1 + v_2 + v_3.$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{B}$. Denotarla con A.*
2. *Trovare una base per il nucleo di f.*
3. *Trovare una base per l'immagine di f.*
4. *Sia $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ dove*

$$w_1 = v_1 + 2v_2, \quad w_2 = -v_1 - v_2, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base di V.

5. *Scrivere la matrice che rappresenta f nella base $\mathcal{C}$.* (sia in partenza che in arrivo)

Sol.:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \langle -\frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2 + v_3 \rangle$

3. $\mathcal{B}_{\operatorname{Im} A} = \left\{ A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{ v_1 + 2v_2 + v_3, v_1 + v_3 \}.$

4. $\mathcal{C}$ è una base $\Leftrightarrow F_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

è una base di $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

$$\operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 .$$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è una base.

5.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] \arrow[r, equal] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B"']
\end{tikzcd}$$

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(B \mid AB) \rightsquigarrow (\mathbb{1}_3 \mid B^{-1}AB)$$

Verifica:

$f(w_1) \overset{?}{=} -w_1 - w_2 + 3w_3$ ✓

$f(w_2) \overset{?}{=} -2w_3$ ✓

$f(w_3) \overset{?}{=} 3w_3$ ✓

Esercizio 5. *Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Consideriamo le seguenti funzioni*

$$F : V \to \mathbb{R}^4 : F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

$$L : V \to V : L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$$

1. *Dimostrare che F ed L sono lineari.*
2. *Trovare la base $\mathcal{B}$ tale che $F = F_{\mathcal{B}}$.*
3. *Trovare la matrice associata ad L nella base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo).*
4. *Trovare la matrice associata ad L nella base standard (sia in partenza che in arrivo).*
5. *Mostrare che L è invertibile e calcolare l' inversa della matrice del punto precedente.*

1. ·) $F(\alpha p+\beta q) = \begin{pmatrix} (\alpha p+\beta q)(-2) \\ (\alpha p+\beta q)(-1) \\ (\alpha p+\beta q)(1) \\ (\alpha p+\beta q)(2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p(-2) \\ p(-1) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q(-2) \\ q(-1) \\ q(1) \\ q(2) \end{pmatrix} = \alpha F(p) + \beta F(q)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall p, q \in V.$

·) $L(\alpha p+\beta q) = (\alpha p+\beta q)(x+1) + (\alpha p+\beta q)(x-1) =$

$= \alpha p(x+1) + \beta q(x+1) + \alpha p(x-1) + \beta q(x-1) =$

$= \alpha L(p) + \beta L(q).$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall p, q \in V.$

2. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ t.c. $F(b_i) = e_i$

$b_1(x) = -\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{12}$, $b_2(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)(x-2)}{6}$

$b_3(x) = b_2(-x) = -\dfrac{(x+2)(x+1)(x-2)}{6}$

$b_4(x) = b_1(-x) = \dfrac{(x-1)(x+1)(x+2)}{12}$

3) $A = \left(F(L(b_1)) \,\middle|\, F(L(b_2)) \,\middle|\, F(L(b_3)) \,\middle|\, F(L(b_4)) \right) =$

$$= \left(\begin{matrix} \cancel{b_1(-1)}+b_1(-3) \\ b_1(0)+b_1(-2) \\ \cancel{b_1(2)}+b_1(0) \\ b_1(3)+\cancel{b_1(1)} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} b_2(-1)+b_2(-3) \\ b_2(0)+\cancel{b_2(-2)} \\ \cancel{b_2(2)}+b_2(0) \\ b_2(3)+\cancel{b_2(1)} \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} b_3(x)= \\ b_2(-x) \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} b_4(x)= \\ b_1(-x) \end{matrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 10/3 & -7/3 & 5/3 & -2/3 \\ 5/6 & 2/3 & 2/3 & -1/6 \\ -1/6 & 2/3 & 2/3 & 5/6 \\ -2/3 & 5/3 & -7/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

4) $C = \left(\underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\text{“}L(1)\text{”}} \,\middle|\, \underset{\substack{\shortparallel \\ 2x}}{\text{“}L(x)\text{”}} \,\middle|\, \underset{\substack{\shortparallel \\ 2x^2+2}}{\text{“}L(x^2)\text{”}} \,\middle|\, \underset{\substack{\shortparallel \\ 2x^3+6x}}{\text{“}L(x^3)\text{”}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5) C^{-1}:

$$\left(C \mid \mathbb{1}_4 \right) \rightsquigarrow \left(\mathbb{1}_4 \,\middle|\, \underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{matrix}}_{C^{-1}} \right)$$