Es 1: 1) $V = U \oplus W$. Sia $v \in V$ e siano $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$ t.c. $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$.

$$\Rightarrow \quad u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow \quad u_1 - u_2 = 0_V = w_2 - w_1 \Rightarrow u_1 = u_2,\ w_1 = w_2.$$

2) $\mathbb{R}[x]_{\leq 3} = U \oplus W$ perché U è generato da un polinomio di grado 3 e i generatori di W hanno grado ≤ 2. Quindi $U \cap W = \{0\}$ e dato $\dim U = 1$, $\dim W = 3 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

$$pr_U^W (1 + x + x^2 + x^3) = 1 + x^2 + x^3$$

$$pr_W^U (1 + x^3) = ? \qquad 1 + x^3 = \underbrace{(1 + x^2 + x^3)}_{\in U} \underbrace{- x^2}_{\in W} \text{ — per motivi di grado}$$

$$pr_W^U (1 + x^3) = -x^2.$$

Es 2 :

1. $L(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3) w_1 + (3x_1 + 6x_3) w_2 +$

$+ (-x_1 - x_2 - x_3) w_3 + (x_1 - x_2 + 3x_3) w_4$

2. $\mathrm{Ker}\, L = \langle -2v_1 + v_2 + v_3 \rangle, \quad \mathcal{B}_{\mathrm{Ker}\, L} = \{ -2v_1 + v_2 + v_3 \}$

3. $\mathcal{B}_V = \{ -2v_1 + v_2 + v_3, \; v_1, \; v_2 \}$

4. $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(L)} = \{ L(v_1), L(v_2) \} = \{ 2w_1 + 3w_2 - w_3 + w_4, \; w_1 - w_3 - w_4 \}$

5. $\mathcal{B}_W = \{ L(v_1), L(v_2), w_1, w_2 \}$

Es 3 : $L: V \to W$

3. L iniettiva $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} L - \dim \operatorname{Ker} L \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{Im} L \subset W \\ \text{s.sp.}}}{\leq} \dim W - \dim \operatorname{Ker} L \leq \dim W$$

L suriettiva $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$

$$\dim W = \dim \operatorname{Im} L = \dim V - \dim \operatorname{Ker} L \leq \dim V.$$

Il viceversa è falso : $L = 0$ dà controesempio.

4 Importante: L è un isomorfismo $\Leftrightarrow$ L manda basi in basi

$\Rightarrow$) $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

$L(\mathcal{B})$ è lin. ind. : $x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n) = 0_W$

$\Rightarrow x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \operatorname{Ker} L = \{0_V\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0.$

$L(\mathcal{B})$ genera : $W = \operatorname{Im} L = \langle L(\mathcal{B}) \rangle.$

Viceversa: Se $L(\mathcal{B})$ è una base allora L è biiettiva.

Infatti, sia $v \in \operatorname{Ker} L$, $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$$0_W = L(v) = x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n)$$

$$\underset{\substack{L(\mathcal{B})\text{ è}\\ \text{lin. ind.}}}{\Longrightarrow} \quad x_1 = \dots = x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0_V \quad \Rightarrow \operatorname{Ker} L = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow L \text{ è iniettiva.}$$

Poiché $L(\mathcal{B})$ è una base di W, $\dim W = \dim V$
e quindi L è suriettiva per
la formula della dimensione.

Es4 :

$$2e_1 = (e_1+e_2) + (e_1 - e_2) \Rightarrow L(e_1) = \frac{1}{2} L(e_1+e_2) + \frac{1}{2} L(e_1-e_2)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L(2e_1 + 2e_3) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1}(e_1 - e_3) = \{ X \in \mathbb{K}^4 \mid L(X) = e_1 - e_3 \}$$

controimmagine

$$= \left\{ X \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$L:$

$$e_1+e_2 \longmapsto e_2$$
$$e_1-e_2 \longmapsto e_1$$
$$e_3+e_4 \longmapsto e_3$$
$$e_3-e_4 \longmapsto e_4$$

Dato che $\mathcal{B}=\{e_1+e_2,\ e_1-e_2,\ e_3+e_4,\ e_3-e_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e $L(\mathcal{B})=\{e_2,\ e_1,\ e_3,\ e_4)$ è una base di $\mathbb{R}^4$, per il punto 4 dell' esercizio 3 L è invertibile.

$L^{-1}:$

$$e_2 \longmapsto e_1+e_2$$
$$e_1 \longmapsto e_1-e_2$$
$$e_3 \longmapsto e_3+e_4$$
$$e_4 \longmapsto e_3-e_4$$

$L^{-1}=S_B$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es 5:

$$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Im} B = \mathbb{R}^2 \qquad \mathcal{B}_{\operatorname{Im} B} = \{e_1, e_2\} = \left\{ B^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\operatorname{Ker} B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Im} C = \langle C^1, C^2, C^3 \rangle$$

$$\underline{C^3 = i\, C^1} \qquad (2-i)C^1 - C^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$C^2 \text{ "}\neq\text{" } (2-i)\, C^1 \qquad \operatorname{Im} C = \langle C^1, C^2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} C} = \{C^1, C^2\}$$

$$\operatorname{Ker} C = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$