Nome, Cognome e Matricola

# Esercitazione

21 Dicembre 2020

**Esercizio 1.** *Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia $Q = (1, 2)^t$. Trovare il punto $R$ ottenuto ruotando $Q$ di $30°$ in senso anti-orario attorno al punto $P = (2, 2)^t$.*
2. *(1 punto) Sia $P = (2, 3)^t$. Trovare il punto $R$ ottenuto riflettendo ortogonalmente $P$ attraverso la retta $r : 2x + 3y = 1$.*
3. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane dell'asse del segmento di vertici $A = (-1, 2)$ e $B = (3, -1)$.*
4. *(1 punto) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$ e trovare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = \frac{1}{4}(9, 3\sqrt{3} - 8)^t$.*
5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (3, 2)^t$ e la retta $r : 2x - y = 1$.*
6. *(2 punti) Sia $r : 2x + y = 1$ e $P = (2, 2)^t$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle due rette $r_1$ ed $r_2$ passanti per $P$ e che formano un angolo di $\pi/4$ con $r$. Posto $P_1 = r \cap r_1$ e $P_2 = r \cap r_2$ calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici $P$, $P_1$ e $P_2$.*

**Esercizio 2.** *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette*

$$r : \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

   *senza cambiare la loro forma.*

2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano:*

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

   *senza cambiare la loro forma.*

3. *(1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $P_1 = (1, 1, 1)^t$, $P_2 = (1, 2, 1)^t$ e $P_3 = (2, 2, 1)^t$.*

4. *(1 punto) Consideriamo le due rette $r = (3, -1, 2)^t + \langle (1, 1, 0)^t \rangle$ e $s = (0, 5, 2)^t + \langle (1, -2, 1)^t \rangle$. Dimostrare che $r$ ed $s$ sono sghembe e trovare il piano $\pi$ contenente $r$ e parallelo a $s$.*

5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (1, 1, 1)^t$, $P_2 = (1, -1, 2)^t$ e $P_3 = (-2, 1, 1)^t$.*

6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette $r = (1, 1, 1)^t + \langle (1, 2, -1)^t \rangle$ ed $s = (1, 2, 3)^t + \langle (2, -1, 1)^t \rangle$*

7. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (1, 2, 3)^t$ ed il piano $\pi : 2x + 3y - z = 2$.*

**Esercizio 3.** *Al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$ *si consideri la matrice* $3 \times 3$

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare tutti i valori di* $k$ *per i quali* $A_k$ *è diagonalizzabile.*
2. *Trovare tutti i valori di* $k$ *per i quali* $A_k$ *è ortogonalmente diagonalizzabile.*
3. *Per i valori di* $k$ *per i quali* $A_k$ *è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante* $\mathcal{B}$*, una matrice* $B$ *ed una matrice diagonale* $D$ *tali che* $B^{-1}A_kB = D$.
4. *Per i valori di* $k$ *per i quali* $A_k$ *è ortogonalmente diagonalizzabile, trovare una matrice ortogonale* $B$ *ed una matrice* $D$ *tali che* $B^tAB = D$.

**Esercizio 4.** *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(1 punto) Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica funzione lineare tale che*

   $$f(v_1) = v_1 + 2v_2 - v_3, \quad f(v_2) = 3v_1 - v_2 + 4v_3, \quad f(v_3) = -v_1 + 5v_2 - 6v_3.$$

   *Trovare la matrice associata ad* $f$ *nella base* $\mathcal{B}$*. Chiamarla* $A$*.*
3. *(3 punti) Trovare la matrice associata ad* $f$ *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$*. Chiamarla* $C$*.*
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di* $f$*.*
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di* $f$*.*

**Esercizio 5.** *Si consideri il polinomio*

$$p(x, y) = 5x^2 + 4xxy + 2y^2 - 2x + 4y - 1.$$

*Ridurre a forma canonica metrica e affine la conica* $\mathcal{C}_p$*, specificando i cambiamenti di coordinate.*