<u>Richiami</u>: Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato.

Una <u>base</u> di $V$ è un sottoinsieme (finito) $\mathcal{B} \subset V$ t.c.

1) $\mathcal{B}$ genera $V$, i.e. $V = \langle \mathcal{B} \rangle = \mathrm{Span}(\mathcal{B})$

2) $\mathcal{B}$ è linearmente Indipendente

Riformuliamo: $\mathcal{B} \subset V$ è una base se è un insieme minimale di generatori di $V$.

Riformuliamo: $\mathcal{B} \subsetneq V$ è una base se è un insieme <u>massimale</u> linearmente indipendente.

Se $\mathcal{B}$ è lin. Ind. e t.c. $\forall v \in V$
$\mathcal{B} \cup \{v\}$ è lin. Dip. $\iff v \in \mathrm{Span}(\mathcal{B})$.

**Teorema**: Ogni spazio vettoriale $V$ finitamente generato ammette una base.

**dim**: Se $V = \{0_V\}$ diciamo "per convenzione" che $\emptyset$ è una sua base.

$V \neq \{0_V\}$. Sia $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0_V$.

$\{v_1\}$ è lin. Ind.

$\langle v_1 \rangle = V$ $\Downarrow$ $\{v_1\}$ è una base $\Downarrow$ FINE

$\langle v_1 \rangle \neq V$ $\Downarrow$ $\exists\, v_2 \in V, \ v_2 \notin \langle v_1 \rangle$

$\Downarrow$ Lemma di Ind. Lin.

$\{v_1, v_2\}$ è lin. Ind.

# Algoritmo di generazione di basi:

Input: $\{v_1, \dots, v_i\}$ lin. Ind.

Output: $\{v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ base di $V$.

Input: $\tau = \{v_1, \dots, v_i\}$ lin. Ind.

$\langle \tau \rangle = V$

$\downarrow$

$\tau$ è una base

$\downarrow$

FINE

$\langle \tau \rangle \neq V$

$\downarrow$

$\exists\, v_{i+1} \in V$ t.c. $v_{i+1} \notin \langle \tau \rangle$

$\downarrow$ Lemma Ind. Lin.

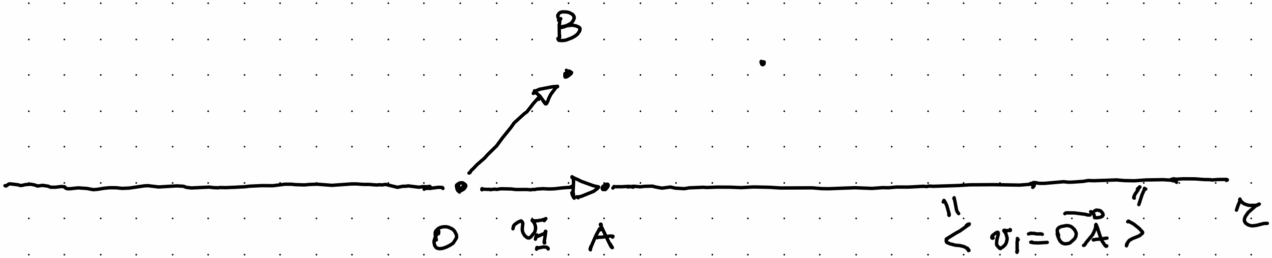
$\{v_1, \dots, v_i, v_{i+1}\}$ è lin. Ind.

$\downarrow$

Ricomincio.

$\blacksquare$

Es: $V = \mathcal{V}_O^2$, $O \neq A \in \mathcal{E}^2$. $v_1 = \overrightarrow{OA}$




$\langle \overrightarrow{OA} \rangle \neq \mathcal{V}_O^2 \Rightarrow \exists \; \overrightarrow{OB} \notin \langle \overrightarrow{OA} \rangle$.

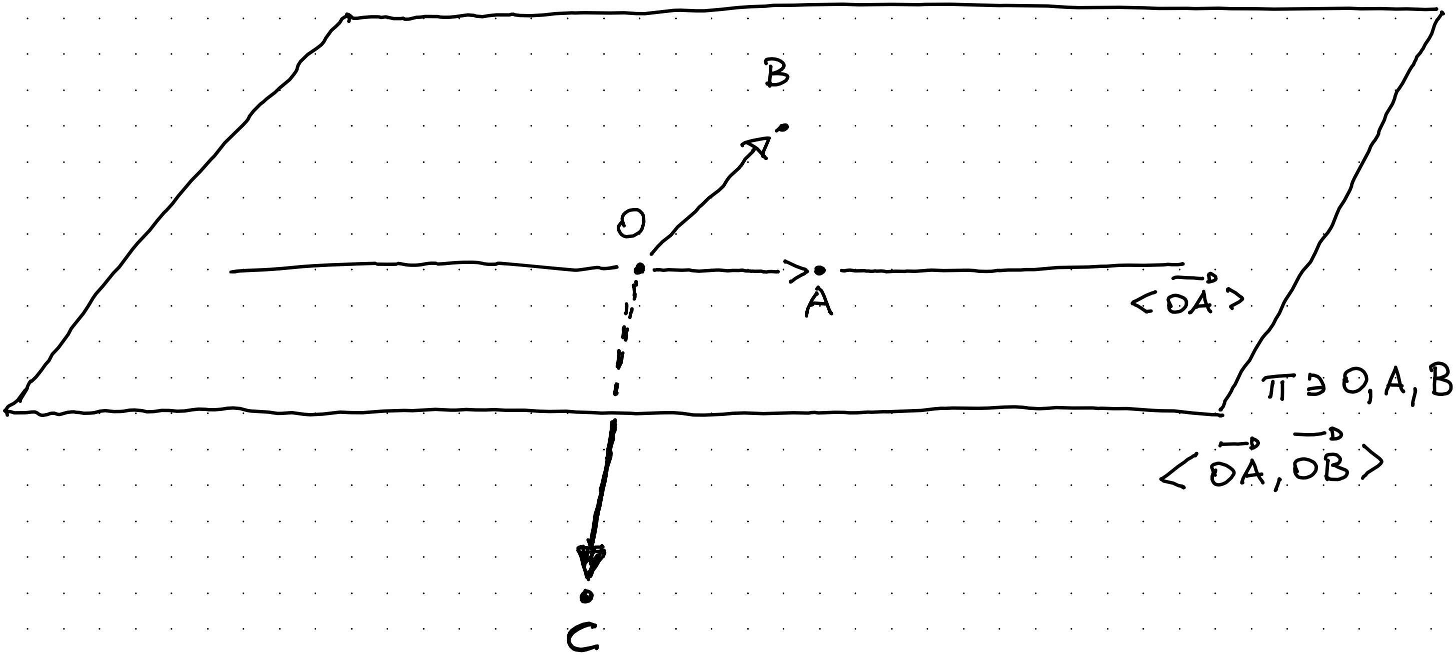
$\mathcal{I} = \{ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \}$

$\langle \mathcal{I} \rangle = \mathcal{V}_O^2 \Rightarrow \{ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \}$ è una base.

$\boxed{\dim \mathcal{V}_O^2 = 2}$.

Es: $V = \mathcal{V}_O^3 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^3 \}$

Sia $A \neq O \in \mathcal{E}^3$.

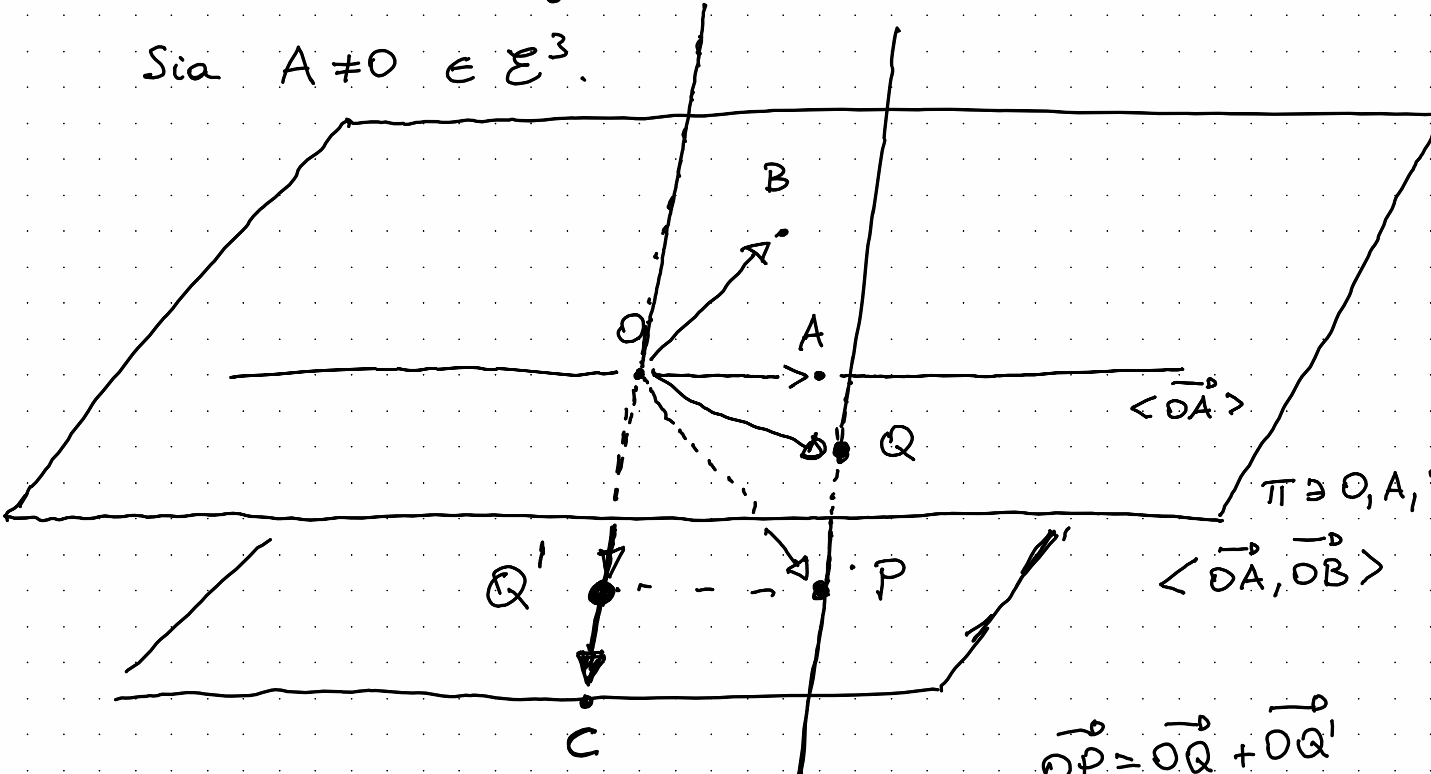



$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = \mathcal{V}_O^3$

Esercizio!

<u>Es</u>: $V = \mathcal{V}_O^3 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^3 \}$

Sia $A \neq O \in \mathcal{E}^3$.




$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ'}$

$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = \mathcal{V}_O^3$

↑

<u>Esercizio</u>!

$\boxed{\dim \mathcal{V}_O^3 = 3}$

# Teorema del completamento.

Sia $\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_i\}$ un insieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale finitamente generato $V$.
Allora $\exists\, v_{i+1}, \dots, v_n \in V$ t.c.

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

è una base di $V$.

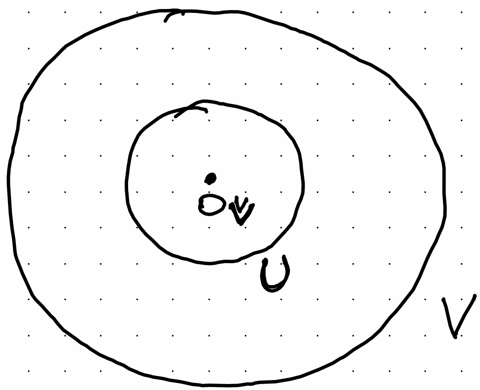
dim: algoritmo di generazione di basi.

Notazione: Diciamo che $\mathcal{B}$ è una base ottenuta completando l'insieme $\mathcal{I}$.

COR: Se $U$ è un s.sp. vett. di $V$, e $V$ è f.g., allora $U$ è finitamente generato

$$\dim U \leq \dim V.$$

Inoltre $\dim U = \dim V \iff U = V$.




$\dim U \leq \dim V$

dim: Se $\mathcal{B}_U$ è una base di $U$, allora $\mathcal{B}_U \subset V$ è lin. ind. ed esistono $v_{i+1}, \dots, v_n \in V$ t.c.
$\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_U \cup \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ è una base di $V$. $\blacksquare$

**Es**: $U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Verificare che $U$ è un sottospazio vettoriale e calcolare la sua dimensione.

**Sol.**:

variabile dipendente o dominante

variabili indipendenti o libere

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_2 - x_3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$x_2 = 1$, $x_3 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

soluzioni-base

$\dim U = 2$.

# Formula di Grassmann

Sia $V$ uno spazio vettoriale finitamente generato.
Siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali.
Abbiamo visto che

$U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.

È vero anche per

$$U \cup W = \{ v \in V \mid v \in U \text{ oppure } v \in W \} \;?$$

·) $U \cup W \subseteq V$

·) Se $v \in U \cup W$ e $t \in \mathbb{K}$, $tv \in U \cup W$.

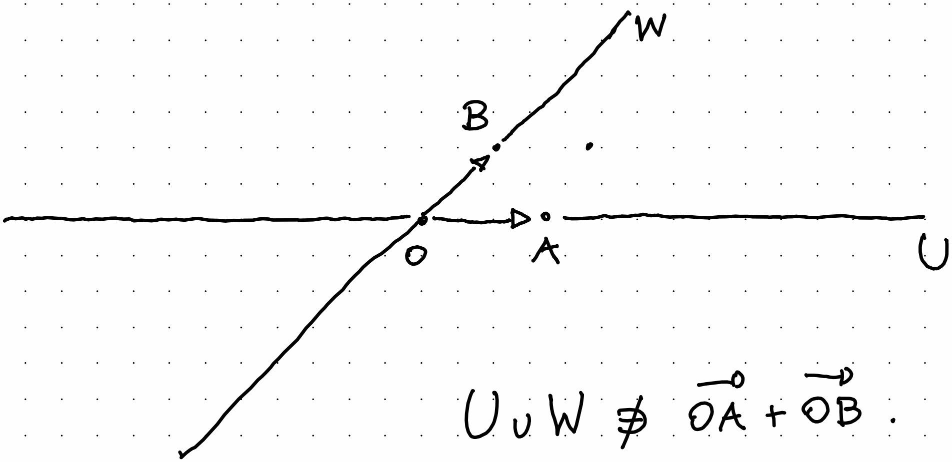
·) $U \cup W$ è chiuso per la somma? NO.

Es: $U = \langle e_1 \rangle$, $W = \langle e_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$

$$U \cup W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 0 \text{ oppure } x_2 = 0 \right\}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 \notin U \cup W$ malgrado $e_1, e_2 \in U \cup W$.

Es: $V = \mathcal{V}_O^2$, $U = \langle \vec{OA} \rangle$, $W = \langle \vec{OB} \rangle$




$U \cup W \not\ni \vec{OA} + \vec{OB}$.

**Def:** La <u>somma</u> di $U$ e $W$ è l'insieme

$$U+W := \{ u+w \mid u \in U,\ w \in W \}$$

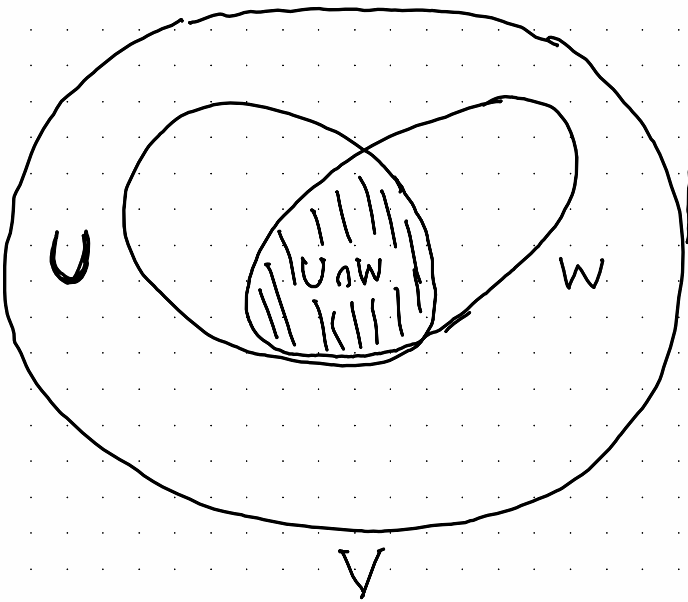
**Oss:** $U \subseteq U+W$ : $\quad u = u + 0_V \underset{0_V \in W}{\in} U+W \quad \forall u \in U$

$W \subseteq U+W$ : $\quad w = 0_V + w \underset{0_V \in U}{\in} U+W \quad \forall w \in W$

$\Rightarrow \quad U \cup W \subseteq U+W$

Esercizio: $U+W$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

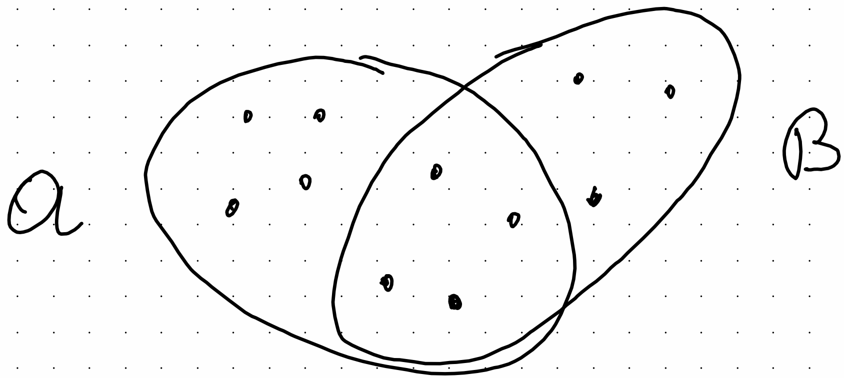
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& V \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & \\
& U+W & \\
U \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & W \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \\
& U\cap W \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \dim V \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\leq$}"] & \\
& \dim(U+W) & \\
\dim U \arrow[ur, phantom, sloped, "\leq"] & & \dim W \arrow[ul, phantom, sloped, "\geq"] \\
& \dim(U\cap W) \arrow[ul, phantom, sloped, "\geq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\leq"] &
\end{tikzcd}$$




## Formula di Grassmann:

$$\boxed{\dim(U+W) + \dim(U\cap W) = \dim U + \dim W}$$

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W)}$$




$a \cap B$

$|a| = 8 \qquad |B| = 7 \qquad |a \cup B| = 11$

$|a \cap B| = 4$

$$|a \cup B| = |a| + |B| - |a \cap B|$$

**Teorema** (Formula di Grassmann)

Sia $V$ uno spazio vettoriale f.g.. Siano $U, W \subset V$ dei sottospazi vettoriali. Allora

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

**Dimostrazione:**

Sia $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_h\}$ una base di $U \cap W$.
$(\dim U \cap W = h)$.
Estendiamola ad una base di $U$

$$\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_h, u_{h+1}, \dots, u_k\} \subset U$$

$(\dim U = k)$
Estendiamo $\mathcal{B}_{U\cap W}$ ad una base di $W$

$$\mathcal{B}_W = \{v_1, \dots, v_h, w_{h+1}, \dots, w_s\} \subset W \quad (\dim W = s)$$

Dimostriamo che

$$B_U \cup B_W = \{v_1, \dots, v_h, u_{h+1}, \dots, u_k, w_{h+1}, \dots, w_s\}$$

è una base di $U+W$.

1) $\underline{B_U \cup B_W \text{ è lin. Ind.}}$ :

$$\underbrace{x_1 v_1 + \dots + x_h v_h}_{= X} + \underbrace{y_{h+1} u_{h+1} + \dots + y_k u_k}_{= Y} + \underbrace{z_{h+1} w_{h+1} + \dots + z_s w_s}_{= Z} = 0_V$$

$$X + Y + Z = 0_V$$

$$\Rightarrow \underset{\in W}{Z} = \underbrace{-X-Y}_{\in U} \Rightarrow Z \in U \cap W$$

$$\Rightarrow Z = t_1 v_1 + \dots + t_h v_h \overset{B_W \text{ è lin. Ind.}}{\Rightarrow} Z = 0 \Rightarrow X + Y = 0$$

$$\overset{B_U \text{ è lin. Ind.}}{\Rightarrow} X = Y = 0_V$$

2) $\underline{\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W \text{ genera } U+W}$

$$v = u + w \in U+W \qquad (u \in U,\ w \in W)$$

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_h v_h + t_{h+1} u_{h+1} + \dots + t_k u_k$$
$$w = s_1 v_1 + \dots + s_h v_h + s_{h+1} w_{h+1} + \dots + s_s w_s$$

$$v = u + w = (t_1 + s_1) v_1 + \dots + (t_h + s_h) v_h +$$
$$+ t_{h+1} u_{h+1} + \dots + t_k u_k +$$
$$+ s_{h+1} w_{h+1} + \dots + s_s w_s \in \langle \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W \rangle.$$

$\blacksquare$

Es: $U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim U = \dim W = 2.$ $\qquad 2 \leq \dim U+W \leq 3$

$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = 4$

| $\dim U+W$ | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $\dim U \cap W$ | 2 | 1 |

X

Se $\dim U \cap W = 2$ allora $U = W$, assurdo: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$.

$\Rightarrow \dim U \cap W = 1$ e $\dim(U+W) = 3 \Rightarrow U+W = \mathbb{R}^3$. ∎