Problema: Dato uno spazio vettoriale finitamente generato

$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

quali sono le cardinalità degli insiemi **minimali** di generatori di V?

$\mathcal{I} \subset V$ **minimale** di generatori se i suoi sottoinsiemi propri non generano V. ①

cardinalità? ②

Un insieme di generatori $\mathcal{T}$ di V è minimale se e solo se è linearmente Indipendente.

Lemma di indipendenza lineare

<u>Richiami:</u> $\mathcal{T} = \{v_1, .., v_k\} \subset V$ è lin. Ind.

se non è lin. Dip.

ovvero l' unica relazione di dipendenza lineare

$$\boxed{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0_V}$$

è quella Triviale $t_1 = t_2 = .. = t_k = 0$.

Es: Dimostrare che $\tau = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{K}[x]$ è lin. Ind.

Sol.: Se esistono $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{K}$ t.c.

$$t_1 1 + t_2 x + t_3 x^2 = 0_{\mathbb{K}[x]} = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$$

allora

$$t_1 = 0$$
$$t_2 = 0$$
$$t_3 = 0.$$

Es: $\mathcal{C} = \{1-x,\ 1+x,\ 1+x+x^2\} \subset \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$.

è lin. Ind.

Sol.: Scriviamo $0_{\mathbb{K}[x]_{\leq 2}}$ come loro combinazione lineare:

$$t_1(1-x) + t_2(1+x) + t_3(1+x+x^2) = 0_{\mathbb{K}[x]_{\leq 2}}$$

$$(t_1+t_2+t_3) + (-t_1+t_2+t_3)x + t_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2+t_3 = 0 \\ -t_1+t_2+t_3 = 0 \\ t_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2 = 0 \\ -t_1+t_2 = 0 \\ t_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = t_1 \\ 2t_1 = 0 \\ t_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0.$$

$\square$

Es: $\tau = \{1, x, 1+x\}$ è lin. Dip.

Sol.: $1 + x - (1+x) = 0_{\mathbb{K}[x]}$ $\boxed{\mathbb{N}}$

Es: $\tau = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. Ind.

perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\underline{Es}$: $\quad \mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

è lin. Ind..

<u>Sol.</u>: Scriviamo $0_{\mathbb{R}^3}$ come loro combinazione lineare:

$$t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 10 t_2 + 100 t_3 = 0 \\ t_2 + 10 t_3 = 0 \\ t_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 = t_3 = 0.$$

$\blacksquare$

<u>OSS</u>: Sia $\tau = \{v_1, \dots, v_k\}$. Se $v_2 = t v_1$ allora τ è lin. Dip.

Infatti,

$$t v_1 - v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_k = 0_V$$

è una relazione di dipendenza lineare.

Es:

$$\tau = \left\{ \begin{array}{ccccc} v_1 & & v_2 & & v_3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & , & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & , & \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

è lin. Dip? Si perchè $v_3 = -v_1$.

<u>oss</u>: Se $\mathcal{T}$ è lin. Ind. e $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ allora $\mathcal{S}$ è lin. Ind.

"Indip. Lin. è chiusa per sottoinsiemi"

<u>oss</u>: Se $U = \text{Span}(\mathcal{T})$, e $U \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{T}$ è un insieme finito, allora

$$U = \text{Span}(\mathcal{S}).$$

"Essere generatori è chiusa per soprainsiemi".

<u>Es</u>: $\text{Span}(v) = \text{Span}(v, 2v) = \text{Span}(v, 3v, 4v)$

Teorema fondamentale sull'indipendenza lineare

Sia $V = \mathrm{Span}(\mathcal{T})$ uno spazio vettoriale generato dall'insieme

$$\mathcal{T} = \{v_1, \dots, v_K\}.$$

Sia $\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_n\}$ un sottoinsieme lin. Ind. di V. Allora

$$n \leq K.$$

Es: Sia $\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45 \\ 179 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

$\mathcal{I}$ è linearmente indipendente? **NO!**

per il Teorema fondamentale.

$$\mathbb{R}^2 \underset{\uparrow}{=} \operatorname{Span}\Big(\underset{e_1}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{e_2}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \Big)$$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Es</u>: $\tau = \{\, 1-x,\ 1+x,\ 2+10x \,\} \subset \mathbb{K}[x]_{\le 1} \doteq \mathrm{Span}(1,x)$

è lin. Ind.? NO. perché $|\tau| = 3 > 2$.

<u>Es</u>: $\tau = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \\ 10^3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \cancel{\doteq 5}$

è lin. Ind.? NO. perché

$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ e

$|\tau| = 4 > 3 = |\{e_1, e_2, e_3\}|$.

dim: Dato che $z_1 \in V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ $\exists\ t_1, \dots, t_k \in K$ t.c.

$$z_1 = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k .$$

Può essere che $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$? NO!

Se lo fossero allora z_1 sarebbe 0_V.

Ma z_1 non può essere zero perché

$\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_n\}$ è lin. Ind. per ipotesi.

Quindi esiste un coefficiente $t_{i_1} \neq 0$.

$\Longrightarrow$ Lemma di scambio $\quad V = \mathrm{Span}\left(\mathcal{T} \setminus \{v_{i_1}\} \cup \{z_1\}\right)$

A meno di riordinare possiamo assumere $i_1 = 1$

$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(z_1, v_2, \dots, v_k).$$

$$z_2 = t_1 z_1 + t_2 v_2 + \dots + t_k v_k \neq 0_V.$$

può essere che $t_2 = t_3 = \dots = t_k = 0$?

No perché se lo fosse z_2 sarebbe un multiplo di z_1.

Quindi, a meno di riordinare, possiamo assumere $t_2 \neq 0$.

$\Rightarrow$ Lemma di scambio

$$V = \mathrm{Span}(z_1, v_2, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(z_1, z_2, v_3, \dots, v_k)$$

$$z_3 = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 v_3 + \dots + t_k v_k \neq 0_V$$

può essere che $t_3 = t_4 = \dots = t_k = 0$?

No perché se lo fossero si avrebbe

$$z_3 = t_1 z_1 + t_2 z_2 \Rightarrow t_1 z_1 + t_2 z_2 - z_3 = 0_V$$

una relazione di dip. lin. tra el. di S.

contro l'ipotesi che S è lin. Ind.

Quindi, $t_3 \neq 0$

$\Rightarrow$ Lemma di scambio $\quad V = \mathrm{Span}(z_1, z_2, z_3, v_4, \dots, v_n)$.

Procedendo così:

$$V = \text{Span}(z_1, z_2, \dots, z_n, v_{n+1}, \dots, v_k)$$

e quindi $n \leq k$. $\blacksquare$

Conseguenze.

COR: Sia $V = \mathrm{Span}(\mathcal{T})$ con $\mathcal{T}$ lin. Ind.

Sia $\mathcal{S} \subset V$ un insieme lin. Ind. t.c.

$$V = \mathrm{Span}(\mathcal{S}).$$

Allora

$$|\mathcal{T}| = |\mathcal{S}|$$

dim:

$$\left.\begin{array}{l} V = \mathrm{Span}(\mathcal{T}) \supset \underset{\substack{\text{Lin.}\\ \text{Ind.}}}{\mathcal{S}} \xRightarrow{\text{Teo fond.}} |\mathcal{S}| \leq |\mathcal{T}| \\ V = \mathrm{Span}(\mathcal{S}) \supset \underset{\substack{\text{Lin.}\\ \text{Ind.}}}{\mathcal{T}} \xRightarrow{\text{Teo fond.}} |\mathcal{T}| \leq |\mathcal{S}| \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathcal{S}| = |\mathcal{T}|.$$

Def: Una <u>base</u> di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme finito $\mathcal{B} \subset V$ t.c.

1) $\mathcal{B}$ è lin. Ind.

2) $\mathcal{B}$ genera V, i.e. $V = \mathrm{Span}(\mathcal{B})$

<u>OSS</u>: Quindi una base di V è un insieme minimale di generatori di V.

Riformuliamo il corollario:

<u>COR</u>: Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono due basi di V allora $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.

<u>Def</u>: La <u>dimensione</u> di uno spazio vettoriale V è la cardinalità di una sua base.

Problemino:

Non tutti gli spazi vettoriali ammettono una base:

•) $\{0_V\}$

Convenzione $\dim \{0_V\} = 0$.

•) $V = \mathbb{K}[x]$ non è finitamente generato e quindi non può ammettere una base:

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}\}$ è lin. Ind. $\forall n \geq 1$

$\blacksquare$

Es:

- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ perché $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ genera $\mathbb{R}^2$ ed è lin. Ind. (Esercizio).

- $\dim \mathbb{K}^n = n$, una base è $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

- $\dim \mathbb{K}[x]_{\leq n} = n+1$, una base è $\{1, x, \dots, x^n\}$.

<u>Notazione</u> : Ieri abbiamo visto:

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \bigcap \{U \text{ s.sp. di } V \mid v_1, \dots, v_k \in U\}$$

è il più piccolo s.sp. vett. che contiene $v_1, \dots, v_k$

$\langle \tau \rangle :=$ più piccolo s.sp. vettoriale che contiene τ

$=$ sottospazio generato da τ.

$$\boxed{\langle \tau \rangle = \mathrm{Span}(\tau) = \mathcal{L}(\tau)}$$

se τ è finito.

$\dim \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) = 4$ una base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$ $\qquad \mathbb{K}^{m\times n}$