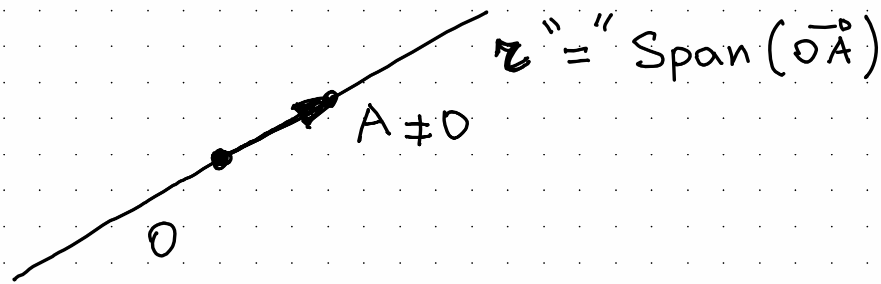
Richiami:

Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non-vuoto U di V t.c.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Es: Rette per l'origine in V_O^2



NB: 0_V deve appartenere a U.

Prop.: L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale.

dim: Siano U e W sottospazi vettoriali di V. Dimostriamo che $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.

1) $0_V \in U$ e $0_V \in W$ perché U e W sono sottospazi vettoriali. Quindi $0_V \in U \cap W$.

2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $v_1, v_2 \in U \cap W$. Allora

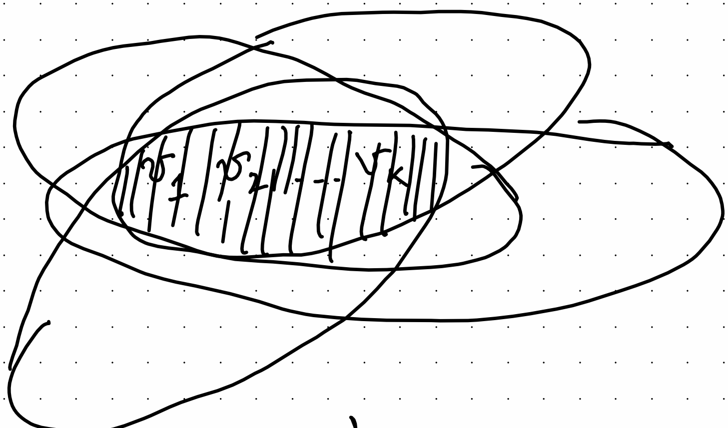
$$\alpha v_1 + \beta v_2 \in U \quad \text{(perché } U \text{ è s.sp. vett.)}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 \in W \quad \text{(perché } W \text{ è s.sp. vett.)}$$

$$\Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in U \cap W. \quad \blacksquare$$

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k) = \{ t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} \}$$

<u>Teorema</u>: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $v_1, \dots, v_k$.



<u>dim</u>: Dimostriamo che

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \bigcap \{ U \text{ s.sp. } V \mid v_1, \dots, v_k \in U \}$$

<u>Teorema</u>: Span$(v_1, \dots, v_k)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $v_1, \dots, v_k$.

<u>dim</u>: Sia U un <u>sosp. vett.</u> di V che contiene <u>$v_1, \dots, v_k$</u>. Allora

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in U \qquad \forall t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$$

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 \in U$$

$$\Rightarrow (t_1 v_1 + t_2 v_2) + t_3 v_3 \in U$$

$$\Rightarrow (t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3) + t_4 v_4 \in U \dots$$

$$\Rightarrow t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in U. \Rightarrow \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \subseteq U$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ che contiene $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Chi è U?

<u>Sol.</u>: $U = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Infatti, per il Teorema

$$\mathbb{K}[x]_{\leq n} \supseteq U \supseteq \operatorname{Span}(1, x, x^2, \dots, x^n) = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$$

$\blacksquare$

<u>OSS</u>: Se V è finitamente generato, i.e.

$$V = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

Se $U \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale t.c. $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ allora $U = V$.

Sia $U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$. Trovare condizioni affinché k sia minimo.

<u>Es</u>: $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$

$$= \left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}t_1 + 2t_2\\t_1 + 2t_2\end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (t_1 + 2t_2) \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ t \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Lemma di scambio
(Esercizio)

<u>Es</u>: $\quad \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$

Può essere che $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$?

Se fosse così, allora

$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sarebbe un multiplo di $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = t \\ 1 = 2t \end{cases}$$ Assurdo!

2 è il numero minimo.

OSS FONDAMENTALE :

$$v_K \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_{K-1})$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\ t_1, \dots, t_{K-1}, t_K \in \mathbb{K}$ $\underline{t_K \neq 0}$ t.c. $\boxed{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_K v_K = 0_V}$

$\Downarrow$) $\quad v_K = t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1}$

$$\Rightarrow \quad t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} - v_K = 0_V$$

$\Uparrow$) Se $t_1 v_1 + \dots + t_{K-1} v_{K-1} + t_K v_K = 0_V$ e $t_K \neq 0$

$$\Rightarrow \quad v_K = -\frac{t_1}{t_K} v_1 - \frac{t_2}{t_K} v_2 - \dots - \frac{t_{K-1}}{t_K} v_{K-1} \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_{K-1})$$

■

Def: Date K vettori $v_1, \dots, v_K \in V$ diciamo che essi sono

LINEARMENTE DIPENDENTI

se esistono $t_1, \dots, t_K \in \mathbb{K}$ **non** tutti nulli tali che

$$\boxed{t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_K v_K = 0_V}$$

Relazione di dipendenza lineare

Notazione: In questo caso diciamo anche che l'insieme

$$\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_K\}$$

è lin. DIP..

Es:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono lin. Dip.? si:

$$v_3 = v_1 + v_2.$$

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

è <u>una</u> relazione di dipendenza lineare.

Es : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$

sono lin. Dip. ? Si :

$$v_1 = -i\, v_2 \qquad\qquad i v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix} = -v_1$$

$$v_2 = i v_1 \Rightarrow i v_1 - v_2 = 0_{\mathbb{C}^2}$$

$$v_1 + i v_2 = 0_{\mathbb{C}^2} .$$

è una relazione di dipendenza lineare.

Es: $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

è lin. Dip.? NO!

Se esistesse una relazione di dip. lin.

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

con $t_1 \neq 0$ allora $v_1 = -\frac{t_2}{t_1} v_2$

ovvero v_1 sarebbe un multiplo di v_2, che è falso.

con $t_2 \neq 0$ allora $v_2 = -\frac{t_1}{t_2} v_1$

ovvero v_2 sarebbe un multiplo di v_1 che è falso.

OSS: Due vettori v_1 e v_2 sono linearmente Dipendenti se e solo se sono uno multiplo dell'altro.

NB: Questo è falso per più di due vettori (vedi esempio precedente).

Riformuliamo l'oss. fond.:

Lemma di dipendenza lineare

Un insieme $\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ è linearmente Dipendente se e solo se $\exists$ un indice $i = 1, 2, \dots, k$ t.c.

$$\mathrm{Span}(\tau) = \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\}).$$

dim:

$\Rightarrow$) $\exists$ una relazione di dip. lineare

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0_V$$

e sia i un indice t.c. $t_i \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad v_i = -\frac{t_1}{t_i} v_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} v_{i-1} - \dots - \frac{t_k}{t_i} v_k$$

Lemma di dipendenza lineare

Un insieme $\tau = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ è linearmente Dipendente se e solo se $\exists$ un indice $i = 1, 2, \dots, k$ t.c.

$$\mathrm{Span}(\tau) = \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\}).$$

dim:

$\Rightarrow$) $\exists$ una relazione di dip. lineare

$$t_1 v_1 + \dots + t_k v_k = 0_V$$

e sia i un indice t.c. $t_i \neq 0$.

$$\Rightarrow v_i = -\frac{t_1}{t_i} v_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} v_{i-1} - \dots - \frac{t_k}{t_i} v_V$$

$\Rightarrow v_i \in \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$. Dato $v_j \in \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$ $\forall j \neq i$ otteniamo che

$$\mathrm{Span}(\tau) \subseteq \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\}) \subseteq \mathrm{Span}(\tau)$$

Viceversa, se $\text{Span}(\tau) = \text{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$ allora $v_i \in \text{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$ e quindi esistono $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v_i = t_1 v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

$$\Rightarrow \quad 0_V = t_1 v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} - v_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

è una relazione di dipendenza lineare.

$\blacksquare$

Corollario: Se τ è linearmente dipendente e $U = \mathrm{Span}(\tau)$ allora $|\tau|$ **non** è la minima cardinalità di un insieme di generatori di U.

dim:

$$U = \mathrm{Span}(\tau) = \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\})$$

Lemma di dip. lineare

Quindi $\tau \setminus \{v_i\}$ è un insieme di generatori di U che ha un numero inferiore di elementi rispetto a τ. $\blacksquare$

OSS: •) $\{0_V\}$ è lin. Dip.:

$$\underset{\neq 0}{\underline{\underline{1}}}\, 0_V = 0_V$$ è una relazione di dip. lineare.

•) $\{0_V, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ è lin. Dip. $\forall v_2, \dots, v_k \in V$.

$$\underline{1}\, 0_V + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_k = 0_V$$

è una relazione di dipendenza lineare.

<u>Def</u>: Un insieme di vettori $\mathcal{I} = \{v_1, \dots, v_k\}$ si dice

LINEARMENTE INDIPENDENTE

se non è linearmente <u>D</u>ipendente.

Notazione: Diciamo anche che i vettori $v_1, \dots, v_k$ che formano $\mathcal{I}$ sono

linearmente <u>I</u>ndipendenti.

Riformuliamo il lemma di dip. lin.:

Lemma di indipendenza lineare

Un insieme di vettori $\tau = \{v_1, \dots, v_k\}$ è lin. Ind. se e solo se

$$\mathrm{Span}(\tau) \neq \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\}) \quad \forall i = 1, \dots, k$$

ovvero se e solo se

$$v_i \notin \mathrm{Span}(\tau \setminus \{v_i\}) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

COR: Se $U = \text{Span}(Z)$ e Z è lin. Ind. allora

$|Z|$ è minima tra tutte le cardinalità degli insiemi di generatori di U. (domani)

i sottoinsiemi propri di Z **non** sono insiemi di generatori di U.

Es: ·) $\mathcal{I} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. Ind.

·) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$\{ v_1 = e^x, \ v_2 = e^{2x}, \ v_3 = e^{3x} \}$ è lin. IND.

Infatti, $t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 = 0$ vuol dire

$$\boxed{t_1 e^x + t_2 e^{2x} + t_3 e^{3x} = 0} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad t_1 = t_2 = t_3 = 0.$$

$\xrightarrow{\text{deriviamo}}$ $t_1 e^x + 2t_2 e^{2x} + 3t_3 e^{3x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\Uparrow$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 e^{2x} + 2t_3 e^{3x} = 0} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{2t_3 e^{3x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$\xrightarrow{\text{deriviamo}}$ $2t_2 e^{2x} + 6t_3 e^{3x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$