Abbiamo visto:

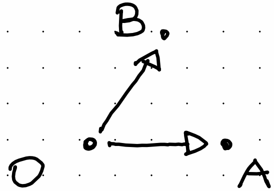
$$\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_k) = \{t_1v_1+\dots+t_kv_k \mid t_1,\dots,t_k\in\mathbb{K}\}\subset V$$

<u>Es</u>: Siano $O,A,B\in\mathcal{E}^2$ tre punti distinti e non allineati.

Allora

$$\mathcal{V}_O^2 = \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$

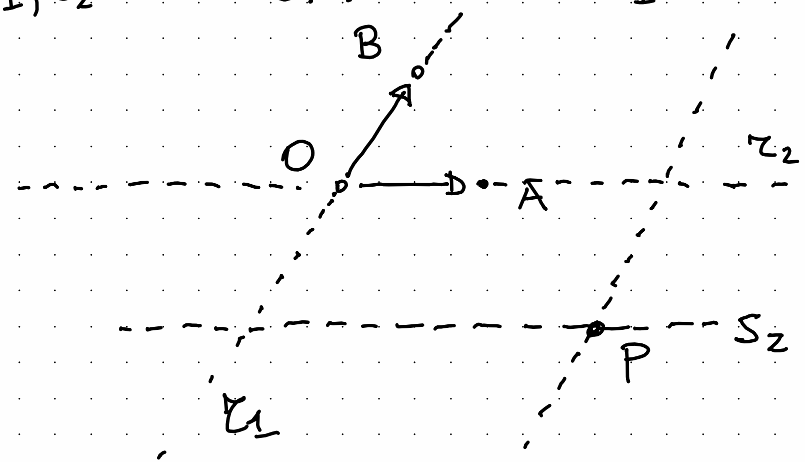
Es: Siano $O, A, B \in \mathcal{E}^2$ tre punti distinti e non allineati.



Allora

$$\boxed{\mathcal{V}_O^2 = \operatorname{Span}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})}$$

Sol.: Dobbiamo dimostrare che $\forall P \in \mathcal{E}^2$ esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\overrightarrow{OP} = t_1 \overrightarrow{OA} + t_2 \overrightarrow{OB}$.

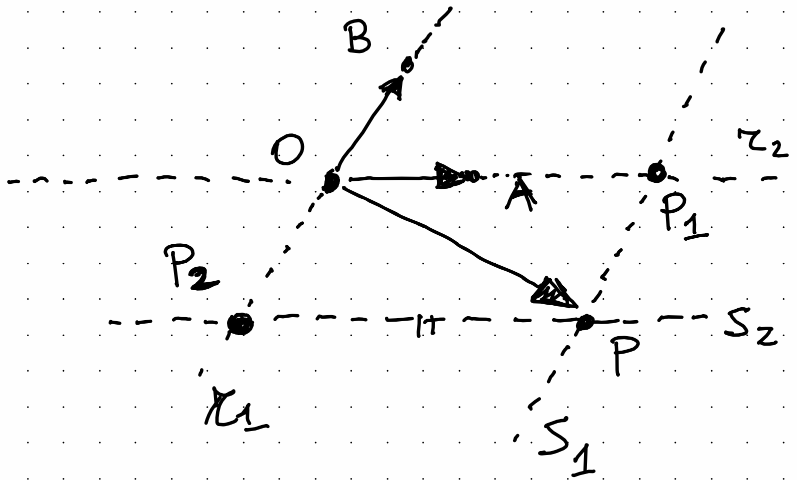


r_1 = retta per O e B

r_2 = retta per O e A

$s_1 :=$ retta per P parallela a r_1

s_2 = retta per P parallela a r_2



r_1 = retta per O e B

r_2 = retta per O e A

S_1 := retta per P parallela a r_1

S_2 = retta per P parallela a r_2

$P_1 = S_1 \cap r_2$

$P_2 = S_2 \cap r_1$

Per costruzione,

$$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}$$

$\vec{OP_1}$ è un multiplo di $\vec{OA}$ (?) perché $P_1 \in r_2$

$\vec{OP_2}$ è un multiplo di $\vec{OB}$ perché $P_2 \in r_1$.

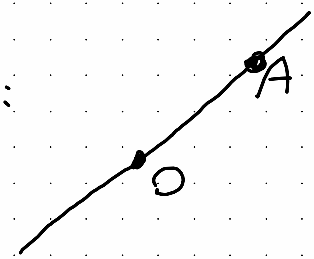
$\vec{OP_1} = t_1 \vec{OA}$ e $\vec{OP_2} = t_2 \vec{OB}$ $\Rightarrow$ $\vec{OP} = t_1 \vec{OA} + t_2 \vec{OB}$.

$\blacksquare$

Es: $O \neq A \in \mathcal{E}^2$

$$\boxed{\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA}) = \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \text{retta per } O \text{ e } A\}}$$

$\mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$ "$=$" r dove r:



Sol.:

$\subseteq$) Sia $\overrightarrow{OC} \in \mathrm{Span}(\overrightarrow{OA})$. Quindi $\exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} C \in r \quad \checkmark$$

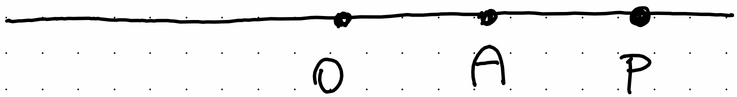
$\supseteq$) Sia $P \in r$. Dimostriamo che $\exists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA}$.

(Se $P = O$ allora $t = 0$)

Supponiamo $P \neq O$. Allora

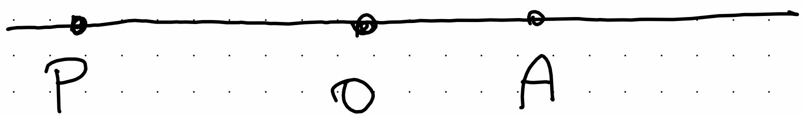
$$t = \begin{cases} \dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} & \text{se } P \text{ giace sulla semiretta che contiene } A. \\ -|\overrightarrow{OP}|/|\overrightarrow{OA}| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1)



$$\vec{OP} = \frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OA}|}\,\vec{OA}$$

2)



$$\vec{OP} = -\frac{|\vec{OP}|}{|\vec{OA}|}\,\vec{OA}$$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Def: Un <u>sottospazio vettoriale</u> di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$

ē

un sottoinsieme $U \subseteq V$ tale che

1) $0_V \in U$;

2) $u_1 + u_2 \in U \quad \forall u_1, u_2 \in U$;

3) $tu \in U \quad \forall t \in \mathbb{K}, \forall u \in U$.

<u>Notazioni</u>:

2) si dice "U ē chiuso per la somma".

3) si dice "U ē chiuso rispetto al prodotto per scalari".

Possiamo riformulare:

Un sottospazio vettoriale U di V è
un sottoinsieme non-vuoto $U \subseteq V$ t.c.

$$\alpha u_1 + \beta u_2 \in U \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall u_1, u_2 \in U.$$

<u>Prop.</u>: $U = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è un sottospazio vettoriale di V.

<u>dim</u>: 1) $v_1 \in U \Rightarrow U$ è non-vuoto.

2) Siano $u_1, u_2 \in U = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$. Allora

$$u_1 = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \; ; \; u_2 = s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$$

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha (t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) + \beta (s_1 v_1 + \dots + s_k v_k)$$

$$= (\alpha t_1 + \beta s_1) v_1 + (\alpha t_2 + \beta s_2) v_2 + \dots + (\alpha t_k + \beta s_k) v_k$$

$$\in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) = U.$$

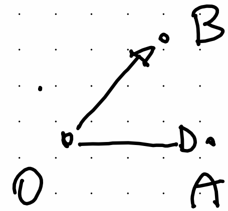
$\blacksquare$

<u>Def</u>: Sia U un sottospazio vettoriale di V della forma

$$U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k).$$

I vettori $v_1, \dots, v_k$ si chiamano <u>generatori</u> di U.

<u>Es</u>: $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sono generatori di $\mathbb{R}^2$.

•) 

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ sono generatori di $\mathcal{V}_O^2$.

•) $1, x, x^2, \dots, x^n$ sono generatori di $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

Def: Un sottospazio vettoriale U si dice **finitamente generato** se esistono $v_1, \dots, v_k \in U$ t.c.

$$U = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k).$$

OSS: Un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale.

ES: •) V è un sottospazio vettoriale di V.

•) $\{0_V\} = \mathrm{Span}(0_V)$ è un s.sp. vett. di V.

Notazione: $\mathcal{T} = (v_1, \dots, v_k)$, $\mathrm{Span}(\mathcal{T}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

<u>Es</u>: ·) $\mathbb{K}^n = \mathrm{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dove $e_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$i = 1, \dots, n.$

$\Rightarrow \mathbb{K}^n$ è finitamente generato.

·) $\mathbb{R} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad x = x \cdot 1$

Notazione: $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_k) = \{ t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} \}$

·) $\mathbb{C} = \{ a \underset{v_1}{1} + \underset{v_2}{i}\, b \mid a, b \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1, i)$

$i^2 = -1$

·) $\mathbb{C} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(1)$ ·) $\mathbb{K} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(1).$

Lemma di Scambio

Sia $U = \mathrm{Span}(\tau)$ con $\tau = (v_1, \dots, v_k)$.

Sia

$0_V \neq u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \in U$

Allora se $t_i \neq 0$

$$\mathrm{Span}(\tau) = \mathrm{Span}(\underbrace{\tau \setminus \{v_i\} \cup \{u\}}_{\text{"Al posto di } v_i \text{ metto } u\text{"}}).$$

Es: $\mathbb{R}^2 = \text{Span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}}_{u_2}\Big)$.

Sol.: Sappiamo che $\mathbb{R}^2 = \text{Span}(\underbrace{e_1}_{v_1}, \underbrace{e_2}_{v_2})$.

$$u_1 = 1e_1 + 2e_2 \qquad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\underset{\text{Lemme discambio}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{R}^2 = \text{Span}(u_1, e_2)$. Quindi esistono $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$u_2 = t_1 u_1 + t_2 e_2$$

Dato che u_2 non è un multiplo di u_1, concludiamo che $t_2 \neq 0$.

$\underset{\text{Lemma di scambio}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{R}^2 = \text{Span}(e_1, e_2) \underset{\substack{\uparrow\\ i=1}}{=} \text{Span}(u_1, e_2) \underset{\substack{\uparrow\\ i=2}}{=} \text{Span}(u_1, u_2)$ $\boxtimes$

dim (Lemma di scambio)

Dobbiamo far vedere che

$$\mathrm{Span}(\mathcal{T}) = \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\}).$$

$$= \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

$$u = t_1 v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + t_i v_i + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_k v_k$$

$$\underset{t_i \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \boxed{v_i = \frac{1}{t_i} u - \frac{t_1}{t_i} v_1 - \dots - \frac{t_{i-1}}{t_i} v_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i} v_{i+1} - \dots - \frac{t_k}{t_i} v_k}$$

$$\Longrightarrow \quad v_i \in \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\})$$

$$v_j \in \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\}) \quad \forall j \neq i$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{Span}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Span}(\mathcal{T} \setminus \{v_i\} \cup \{u\}) \quad \square$$

Es: .) $U = \mathrm{Span}(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n, \; v \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$

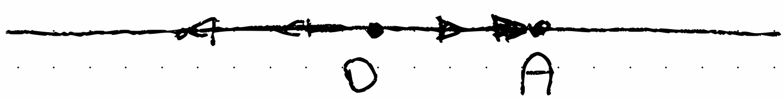
$\Longrightarrow \quad U = \mathrm{Span}(tv)$

$\forall t \neq 0.$

$\Longrightarrow$ lemma di scambio

$U = \mathrm{Span}(\underbrace{2v}_{u})$

$u = 2v$



.) $\mathrm{Span}(v, \underline{0_V}) = \mathrm{Span}(v)$

$\underline{Es}$: $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \text{Span}\,(\underset{u_1}{\overset{\shortparallel}{1+x}},\ \underset{u_2}{\overset{\shortparallel}{1-x}},\ \underset{u_3}{\overset{\shortparallel}{1+x+x^2}})$

$x^2 = -u_1 + u_3$ $\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$.

$2x^2 = 2(x^2) = -2u_1 + 2u_3$

$\forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ $\exists\, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = t_1 (1+x) + t_2 (1-x) + t_3 (1+x+x^2).$$

$\underline{Sol.}$: $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \text{Span}\,(\overset{v_1}{1},\ \overset{v_2}{x},\ \overset{v_3}{x^2})$

$u_1 = v_1 + v_2 \quad \underset{\text{Scambio}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \text{Span}\,(u_1, v_2, v_3)$

$u_2 = t_1 u_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3$ $\quad$ ($t_3 = 0$ perché $gr(u_3) = 2 > gr(u_2)$.)

$u_3 = 1 + x + x^2$
$u_2 = 1 - x$
$u_1 = 1 + x$

$$u_2 = t_1 u_1 + t_2 \underbrace{x}_{v_2}$$

$t_2 \neq 0$ perché u_2 non è un multiplo di u_1.

$$\underset{\text{Scambio}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(u_1, v_2, v_3)$$

$$= \mathrm{Span}(u_1, u_2, v_3)$$

$$u_3 = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 v_3$$

$t_3 \neq 0$ perché $gr(v_3) = gr(u_3)$ e

$gr(u_1) = gr(u_2) < gr(u_3)$.

$$\underset{\text{Scambio}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3).$$

$\blacksquare$

Esercizi settimanali:

$$0v = 0_V$$

$$0v = (1-1)v = 1v - 1v = v - v = 0_V.$$

Viceversa: Se $tv = 0_V$ allora $t = 0$ o $v = 0_V$.

(Esercizio).

u, v, w : 1) $\operatorname{Span}(w) \not\subset \operatorname{Span}(u,v)$.

$u = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $u = 2v = (2+3i)w$

$u = \begin{pmatrix} i \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\operatorname{Span}(w) \subsetneq \operatorname{Span}(u,v)$

$w = u + v$