Richiami:

Una combinazione lineare di h vettori

$$v_1, v_2, \dots, v_h$$

di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$

è

un vettore $v \in V$ della forma

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_h v_h$$

per qualche $t_1, t_2, \dots, t_h \in \mathbb{K}$. Abbiamo denotato

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_h) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_h) = \{ t_1 v_1 + \dots + t_h v_h \mid t_1, \dots, t_h \in \mathbb{K} \}$$

l'insieme delle combinazioni lineari.

Es: .) $\mathcal{L}(0_V) = \{t\, 0_V \mid t \in \mathbb{K}\} = \{0_V\}$

Terminologia:

Un multiplo di un vettore $v \in V$ è un vettore della forma tv, per qualche $t \in \mathbb{K}$.

.) $\mathcal{L}(v) = \{tv \mid t \in \mathbb{K}\} = \{\text{multipli di } v\}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Span}(A) \overset{?}{\subseteq} \text{Span}(B, C)$$

Sol.: Se $\text{Span}(A) \subseteq \text{Span}(B, C)$ allora $A \in \text{Span}(B, C)$

OSS: $v \in \text{Span}(v)$: Infatti: $v = 1v$

Viceversa se $A \in \text{Span}(B, C)$ allora $\text{Span}(A) \subseteq \text{Span}(B, C)$

Infatti, se $A = t_1 B + t_2 C$ allora

$$tA = t(t_1 B + t_2 C) = \dots$$

OSS (generale): Siano $u, v, w \in V$. Allora

$$\mathrm{Span}(u) \subseteq \mathrm{Span}(v, w) \iff u \in \mathrm{Span}(v, w)$$

Infatti:

$\Rightarrow$) Se $\mathrm{Span}(u) \subseteq \mathrm{Span}(v, w)$, allora $u \in \mathrm{Span}(u) \subset \mathrm{Span}(v, w)$

$\Leftarrow$) Se $u \in \mathrm{Span}(v, w)$. Allora $\underline{u = t_1 v + t_2 w}$ (per qualche $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$). Per $t \in \mathbb{K}$

$$tu = t(t_1 v + t_2 w) = (tt_1) v + (tt_2) w$$

$$\in \mathrm{Span}(v, w). \quad \blacksquare$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Domanda: A è una combinazione lineare di B e C?

$$\mathrm{Span}(B,C) = \{ t_1 B + t_2 C \mid t_1, t_2 \in \mathbb{K} \}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = -i\,B = \underbrace{\boxed{-i}}_{t_1} B + \underbrace{\boxed{0}}_{t_2} C \in \mathrm{Span}(B,C).$$

Quindi

$$\mathrm{Span}(A) \subsetneq \mathrm{Span}(B,C).$$

$$it = 2$$
$$t = -2i$$

Assurdo!

È uguale? Se lo fosse C sarebbe un multiplo di A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} t = 1 \\ it = 2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} t = 1 \\ t = -2i \end{cases}}$$

OSS (importante):

$$\boxed{v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

$1v = v$ (Assioma) ; $\boxed{0v = 0_V}$ (Esercizio!)

Infatti,

$$v_1 = 1v_1 = 1v_1 + 0_V = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n$$

$$v_2 = 1v_2 = 1v_2 + 0_V = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n$$

$$\vdots$$

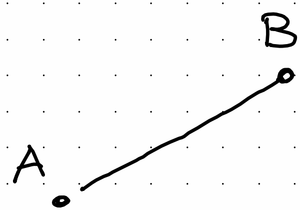
$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_{i-1} + 1v_i + 0v_{i+1} + \dots + 0v_n$$

Esempio di spazio vettoriale: i vettori geometrici del piano.

Dati due punti $A, B \in \mathcal{E}^2$ = piano euclideo

denotiamo con

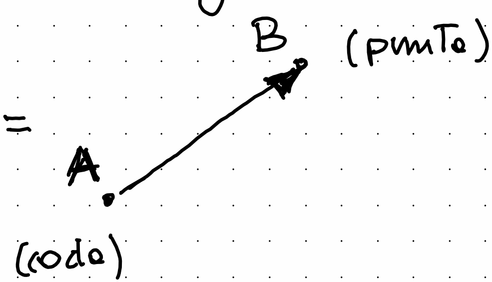
$\overline{AB}$ =



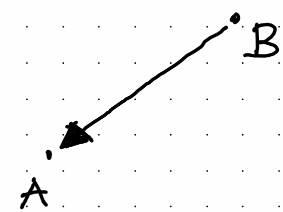
il segmento di estremi A e B.

Diamo ai segmenti una orientazione:

$\overrightarrow{AB}$ =



$\overrightarrow{BA}$ =



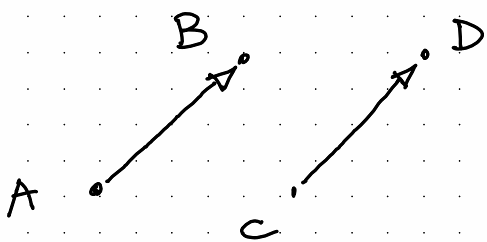
Def: Diciamo che due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono <u>congruenti</u> (o <u>equipollenti</u> o <u>uguali</u>) se

1) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono congruenti (= hanno la stessa lunghezza)

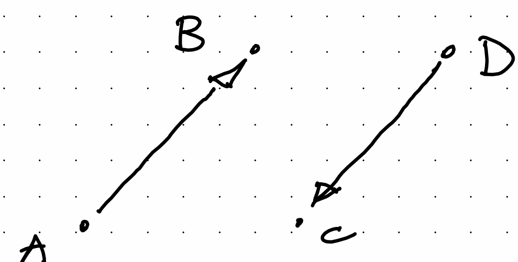
$$\boxed{\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}}$$

2) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono paralleli

3) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno lo stesso verso:



equiversi

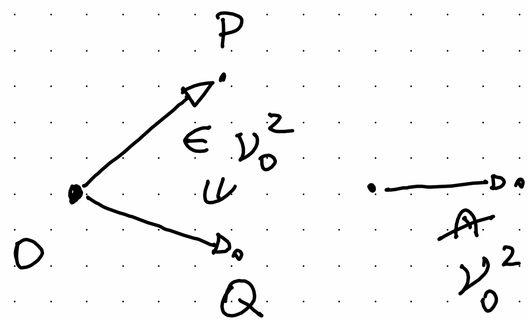


contra-versi.

Def ($\mathcal{V}_O^2$): Fissiamo $O \in \mathcal{E}^2$.

Denotiamo con

$$\mathcal{V}_O^2 = \{ \overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{E}^2 \}$$



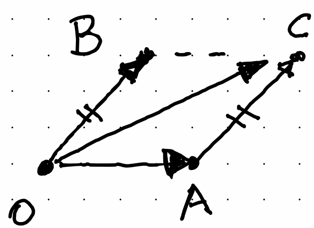
l'insieme dei segmenti orientati che hanno come coda il punto O.

Teorema: $\mathcal{V}_0^2$ può essere dotato di una somma e di un prodotto per scalari che lo rendono un spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

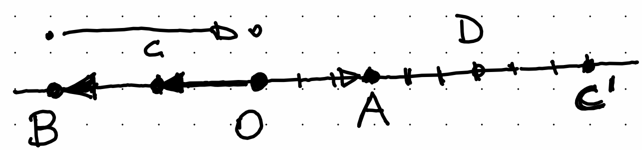
Somma: $+ : \mathcal{V}_0^2 \times \mathcal{V}_0^2 \longrightarrow \mathcal{V}_0^2$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ dove C è l'unico punto t.c.

$$\boxed{\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}}$$



regola del parallelogramma.



$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

$-\overrightarrow{OB} =$ "$\overrightarrow{BO}$"

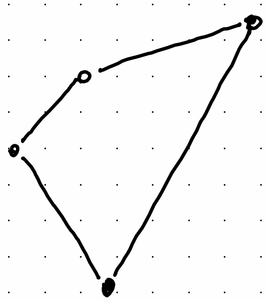
$= \overrightarrow{OD}$

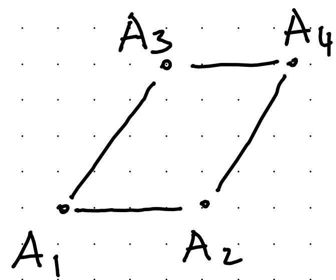
<u>Teorema</u>: $(\mathcal{V}_0^2, +)$ è un gruppo commutativo

La dimostrazione si basa sul seguente

<u>Teorema</u> (del parallelogramma):

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ha due lati paralleli e congruenti.





$$\overrightarrow{A_1A_2} \equiv \overrightarrow{A_3A_4} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_3} \equiv \overrightarrow{A_2A_4}$$

1) Elemento neutro: $\overrightarrow{OO}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OC}$ dove C è t.c. $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OO}$

$\Rightarrow A = C \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ dove C è t.c. $\overrightarrow{OC} \equiv \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow A = C \Rightarrow \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$

2) commutatività:

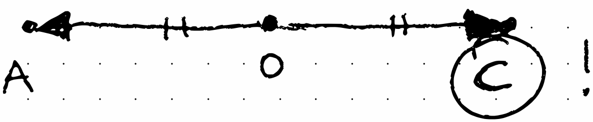
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ dove C è t.c. $\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OB}$

$\underset{\text{Teo parallelogramma}}{\Rightarrow} \overrightarrow{AO} \equiv \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \equiv \overrightarrow{BC}$

$\underset{\text{Def}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

3) <u>opposto</u>: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OO}$ dove C è t.c.

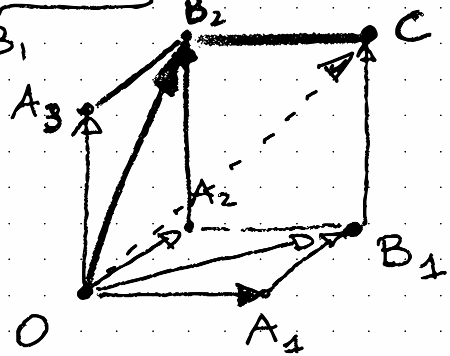
$$\overrightarrow{AO} \equiv \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \equiv \overrightarrow{CO}$$



Quindi $-\overrightarrow{OA}$ è $\overrightarrow{OC}$ dove C è l'unico punto che giace sulla retta per O e A, ha distanza $|\overline{OA}|$ da O e che giace sulla semiretta che non contiene A.

4) Associatività :

$$\underbrace{(\vec{OA_1} + \vec{OA_2})}_{\vec{OB_1}} + \vec{OA_3} \overset{?}{=} \vec{OA_1} + \overbrace{(\vec{OA_2} + \vec{OA_3})}^{\vec{OB_2}}$$



$$\vec{OC} := \vec{OB_1} + \vec{OA_3}$$

$$\vec{OB_1} := \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$$

$$\vec{OB_2} := \vec{OA_2} + \vec{OA_3}$$

Dimostriamo che

$$\vec{OC} := \vec{OB_1} + \vec{OA_3} = \vec{OA_1} + \vec{OB_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{A_1C} \equiv \vec{OB_2}}$$

$$\vec{OC} := \vec{OB_1} + \vec{OA_3} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \boxed{\vec{B_1C} \equiv \vec{OA_3}}$$

$$\vec{OB_1} := \vec{OA_1} + \vec{OA_2} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \vec{A_1B_1} \equiv \vec{OA_2} \Longleftrightarrow \boxed{\vec{A_2B_1} \equiv \vec{OA_1}}$$

$$\vec{OB_2} := \vec{OA_2} + \vec{OA_3} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \boxed{\vec{A_2B_2} \equiv \vec{OA_3}}$$

(vedi appunti).

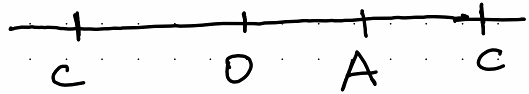
$\blacksquare$

Prodotto per scalari:

$t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}_0^2$. Definiamo

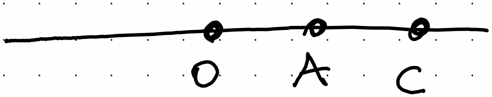
$$t\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$$

dove C è l'unico punto che giace sulla retta per O e A, $|\overline{OC}| = |t|\,|\overline{OA}|$

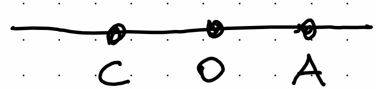


C giace sulla semiretta che contiene A se $t>0$

C giace sulla semiretta che non contiene A se $t<0$

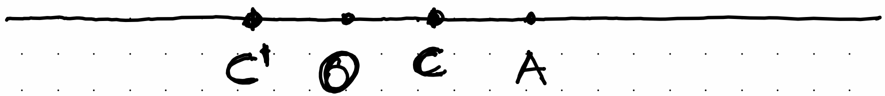


$t>0$



$t<0$

Es: $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$



Teorema: 1) $a\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = a\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OB}$

2) $(a+b)\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OA}$

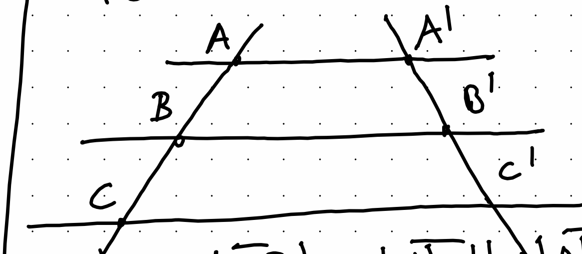
3) $(ab)\overrightarrow{OA} = a\left(b\overrightarrow{OA}\right)$

4) $1\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall A, B \in \mathcal{E}^2.$

dim (Esercizio).

Teoreme di Talete



$|AC| : |AB| = |A'C'| : |A'B'|$