Abbiamo dimostrato:

<u>Teorema</u>: Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (i.e. $S_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile) se e solo se

1) $Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0\} \subset \mathbb{R}$

2) $ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

In questo caso,

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A.

$$V_\lambda(A) := \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) = \text{autospazio relativo all'autovalore } \lambda$$

<u>OSS</u>: Il Teorema vale per ogni campo $\mathbb{K}$.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la condizione 1) è ridondante.

In pratica, se $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$. Per capire se A è diagonalizzabile:

1) Trovare le radici del polinomio caratteristico $P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A)$.

2) $\forall \lambda \in Sp(A)$, trovare una base $\mathcal{B}_\lambda$ del sottospazio vettoriale

$$V_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

$Sp(A) = \{\lambda_1, .., \lambda_k\}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$, se

$$\dim V_{\lambda_1}(A) + \dim V_{\lambda_2}(A) + \dots + \dim V_{\lambda_k}(A) = n$$

e $Sp(A) \subset \mathbb{R}$ allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

In questo caso una base diagonalizzante è

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$$

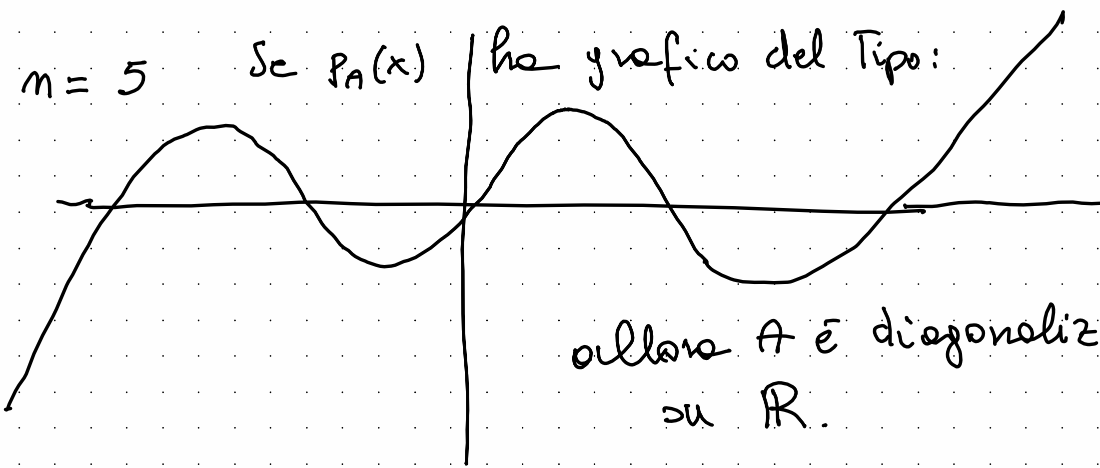
COR: Se gli autovalori di A sono reali e distinti allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Es: Se
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Sp(A) = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

Se $a_{ii} \neq a_{jj}$ $\forall i \neq j$ allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Es: $n = 5$ Se $p_A(x)$ ha grafico del tipo:



allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Es: Stabilire se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una base di autovettori.

Sol.:

$$p_A(x) = x^2 - Tr(A)\,x + \det A =$$
$$= x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$\Rightarrow Sp(A) = \{3, -3\} \Rightarrow A$ ha due autovalori reali e distinti e quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$V_3(A) = \mathrm{Ker}(3\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}(1, -5) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_{-3}(A) = \mathrm{Ker}(-3\mathbb{1}_2 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}(1, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base di autovettori è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

In questa base la matrice A si scrive come

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es: Stabilire se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che

$$B^{-1} A B = D.$$

Sol.:

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -x+1 & x-2 & -1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x-3 & -2 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-3 & -2 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)\left[(x-3)(x-2) - 2\right]$$

$$= (x-1)\left[x^2 - 5x + 4\right]$$

$$P_A(x) = (x-1)(x^2-5x+4)$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$P_A(x) = (x-1)^2(x-4). \Rightarrow Sp(A) = \{1,4\} \subset \mathbb{R}. \quad (*)$$

$$ma_A(1) = 2 \quad , \quad ma_A(4) = 1 \geq mg_A(4) \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad ma_A(4) = mg_A(4) = 1. \quad (**)$$

$$V_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(1,1,1) =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad mg_A(1) = 2 = ma_A(1) \quad (***)$$

$(*) + (**) + (***) \Rightarrow$ A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$B = (v_1 | v_2 | v_3) \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} A B = D$$

$$\Leftrightarrow \quad AB = BD$$

$$\Leftrightarrow \quad (Av_1 | Av_2 | Av_3) = (\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \lambda_3 v_3)$$

$\Leftrightarrow \quad \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di autovettori.

Troviamo una base di autovettori:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

cerchiamo $\mathcal{B}_4$:

$$V_4(A) = \operatorname{Ker}(4\mathbb{1}_3 - A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il blocco di Jordan

Sia $n \geq 1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, il blocco di Jordan è la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \ldots$$

$$Sp(J_n(\lambda)) = \{\lambda\}$$

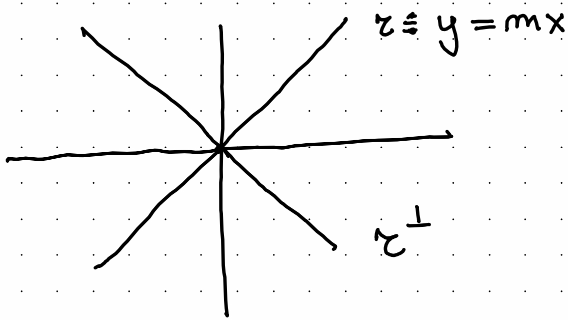
$$V_\lambda(J_n(\lambda)) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \langle e_1 \rangle$$

$$mg_{J_n(\lambda)}(\lambda) = 1 < n = ma_{J_n}(\lambda) \Rightarrow J_n(\lambda)$$ <u>non</u> è diagonalizzabile.

Diagonalizzazione ortogonale

Come sono fatte le matrici $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ che ammetto n assi di simmetria (= rette A-invarianti) a due a due ortogonali?

Es: $Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$



I suoi due assi di simmetria sono ortogonali.

Teorema spettrale (reale) o degli assi principali:

A è ortogonalmente diagonalizzabile $\iff A = A^t$.

Matrici ortogonali

Ricordiamo che una matrice $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>ortogonale</u> se $B^t B = \mathbb{1}_n$.

ovvero se $B^{-1} = B^t$

ovvero se $B = (E_1 | \dots | E_n)$ allora $\begin{cases} E_i \cdot E_j = 0 & \text{se } i \neq 0 \\ E_i \cdot E_i = 1 \end{cases}$

ovvero se le colonne di B formano una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

<u>Es</u>: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ è ortogonale

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad m = \operatorname{Tg} \frac{\theta}{2}.$$

è ortogonale.

Def: Una matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>ortogonalmente diagonalizzabile</u> se esiste una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A.

OSS: A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $\exists$ una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che

$$B^t A B = D.$$

<u>Teorema spettrale</u> (reale) o <u>degli assi principali</u>

Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $A = A^t$.

<u>dim</u>: Se A è ortogonalmente diagonalizzabile, allora esiste una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che $B^t A B = D$.

Allora $A = B D B^t$ e quindi

$$A^t = (B D B^t)^t = (B^t)^t D^t B^t \overset{D=D^t}{=} B D B^t = A$$

Supponiamo che $A = A^t$. Dimostriamo che

$$(*) \quad \boxed{\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_2}(A) \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}(A)}$$

dove $\lambda_1, .., \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A e $\overset{\perp}{\oplus}$ = "somme dirette ortogonale" vuol dire che gli autospazi sono ortogonali a due a due.

Per dimostrare (*):

1) $Sp(A) \subset \mathbb{R}$
2) $V_\lambda(A) \perp V_\mu(A) \quad \forall \lambda \neq \mu \in Sp(A)$
3) $ma_A(\lambda) = mg_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$.

1) Sia $\lambda \in Sp(A) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}$ ed $\exists\ X \neq 0_{\mathbb{C}^n}$, $X \in \mathbb{C}^n$ t.c.

$$AX = \lambda X$$

Definiamo

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Allora

$$X \cdot \overline{X} = x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2 + \dots + x_n \overline{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$X \cdot \overline{X} = 0 \iff X = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

$$\lambda (X \cdot \overline{X}) = (\lambda X) \cdot \overline{X} = AX \cdot \overline{X} = X^t A^t \overline{X} \overset{A = A^t}{=} X^t A \overline{X} \overset{A \text{ è reale}}{=} X^t \overline{A}\, \overline{X}$$

$$= X^t \overline{(AX)} = X^t \overline{(\lambda X)} = \overline{\lambda} (X \cdot \overline{X})$$

$$\lambda\,(x\cdot\bar{x}) = \bar{\lambda}\,(x\cdot\bar{x}) \underset{x\neq 0_{\mathbb{C}^n}}{\Longrightarrow} \lambda=\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \ Sp(A)\subset\mathbb{R}.$

2) Siano $\lambda\neq\mu\in Sp(A)$. Allora $V_\lambda(A)\perp V_\mu(A)$.

Infatti, sia $v\in V_\lambda(A)$ e $w\in V_\mu(A)$

$$v\cdot Aw = v\cdot\mu w = \mu\, v\cdot w$$

$$v\cdot Aw = v^t A w \underset{A=A^t}{=} v^t A^t w = (Av)^t w = (\lambda v)^t w = \lambda\, v\cdot w$$

$$\Rightarrow \mu\,(v\cdot w) = \lambda\,(v\cdot w) \Rightarrow (\mu-\lambda)(v\cdot w)=0$$

$$\underset{\lambda\neq\mu}{\Rightarrow} \quad v\cdot w = 0 \ . \quad \blacksquare$$

3) Sia $\lambda \in Sp(A)$. Sia $W = V_\lambda(A)^\perp$

Allora $\mathbb{R}^n = V_\lambda(A) \overset{\perp}{\oplus} W$

$\forall w \in W$, $Aw = v_1 + w'$ per qualche $v_1 \in V_\lambda(A)$ e $w' \in W$.

$\Rightarrow \quad v_1 \cdot Aw = v_1 \cdot v_1 + v_1 \cdot w' = v_1 \cdot v_1$

$v_1 \cdot Aw \underset{A=A^t}{=} Av_1 \cdot w = \lambda v_1 \cdot w = \lambda (v_1 \cdot w) = 0$

$\Rightarrow v_1 = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow Aw \in W \quad \forall w \in W.$

$\Leftrightarrow$ W è A-invariante.

Se $\mathcal{B}_1$ è una base di $V_\lambda(A)$ e $\mathcal{B}_2$ è una base di W, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e la matrice che rappresenta A nella base $\mathcal{B}$ è

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_K & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \quad \text{dove} \quad K = mg_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A).$$

$$P_A(x) = P_Z(x) \underset{\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det A \det C.}{=} (x-\lambda)^K P_C(x).$$

$p_C(\lambda) \neq 0$. Infatti se $p_C(\lambda) = 0$, allora

$\exists\ X \in \mathbb{R}^{n-k} \setminus \{0\}$ t.c. $CX = \lambda X$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline X \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline CX \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline X \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} \in V_\lambda(A) \cap W = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad \text{contraddizione.}$$

Quindi, $p_C(\lambda) \neq 0$ e da

$$p_A(x) = (x-\lambda)^k \, p_C(x)$$

concludiamo che $\quad mg_A(\lambda) = k = ma_A(\lambda)$.

$\blacksquare$

In pratica, data $A = A^t$ per trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A:

1) Trovare le radici di $p_A(x)$, ovvero $Sp(A)$.

2) $\forall \lambda \in Sp(A)$, utilizzare l'algoritmo di Gram-Schmidt per trovare una base ortonormale $\mathcal{B}_\lambda$ di $V_\lambda(A)$.

Allora se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di A,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$$

è una base cercata.

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Trovare B ortogonale e D diagonale t.c. $B^t A B = D$.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - Tr(A)x^2 + \frac{1}{2}\left(Tr(A)^2 - Tr(A^2)\right)x - \det A$$

$$Tr(A) = 3, \quad Tr(A)^2 = 3^2 = 9$$

$$Tr(A^2) = A_1A^1 + A_2A^2 + A_3A^3 = 2+5+6 = 13$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$P_A(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}(9-13)x + 4 = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

$P_A(1) = 0 \Rightarrow (x-1)$ divide $P_A(x)$.

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 3x^2 - 2x + 4 & x-1 \\ - & x^3 - x^2 & \overline{x^2 - 2x - 4} \\ \hline - & -2x^2 - 2x + 4 & \\ & -2x^2 + 2x & \\ \hline & -4x + 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow P_A(x) = (x-1)(x^2-2x-4)$

$$p_A(x) = (x-1)(x^2-2x-4)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$Sp(A) = \{ 1,\ 1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5} \}.$$

$$V_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sia λ : $\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$ (ovvero $\lambda = 1+\sqrt{5}$ o $\lambda = 1-\sqrt{5}$).

$$V_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathbb{1}_3 - A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-1) & \boxed{-1-(\lambda-1)(1-\lambda)} \end{pmatrix}$$

$$-1-(\lambda-1)(1-\lambda) = -1 + (\lambda-1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda = 4$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2(\lambda-1) & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\lambda \neq 1}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1-\lambda+\frac{4}{\lambda-1}} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix}$$

$$1-\lambda+\frac{4}{\lambda-1} = \frac{-(\lambda-1)^2+4}{\lambda-1} = \frac{-(\lambda^2-2\lambda+1)+4}{\lambda-1} = -\frac{1}{\lambda-1}$$

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\lambda-1} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad V_{1+\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{1-\sqrt{5}}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una base ortonormale di $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ composta di autovettori per A è

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} & -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$B^t A B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1+\sqrt{5} & \\ & & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$