Annunci : ·) Compilare la scheda di valutazione del corso (OPIS). Trovate il codice sulla pagina Web. Il vostro giudizio è importante!

·) Esami : In presenza e da remoto in contemporanea. Vi incoraggio a farli in presenza.

3 ore.

Diagonalizzazione di endomorfismi lineari

Def: Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.
Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un endomorfismo lineare.
Si dice che $\mathcal{L}$ è diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V nella quale la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ è diagonale:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{L}(v_i) = \lambda_i v_i} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$\mathcal{B}$ si chiama una base diagonalizzante per $\mathcal{L}$.

$$\langle v_i \rangle = \{ t v_i \mid t \in \mathbb{K} \}$$

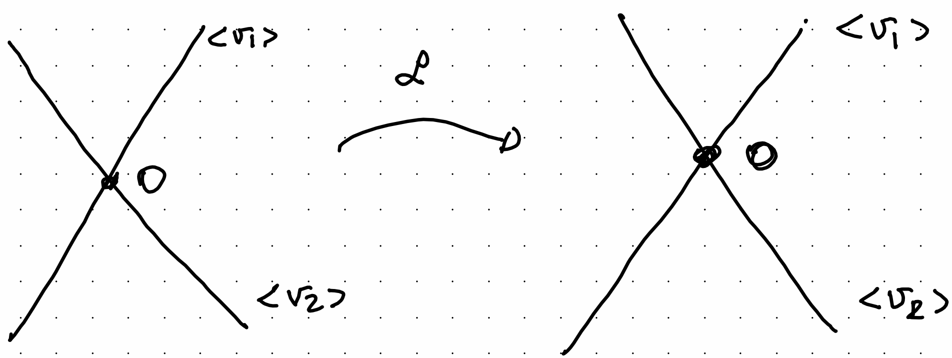
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\langle v_i \rangle) &= \{ \mathcal{L}(t v_i) \mid t \in \mathbb{K} \} \\
&= \{ t\, \mathcal{L}(v_i) \mid t \in \mathbb{K} \} \\
&= \{ t \lambda_i v_i \mid t \in \mathbb{K} \} \subseteq \langle v_i \rangle
\end{aligned}$$

$=$ se e solo se $\lambda_i \neq 0$

Le n rette distinte

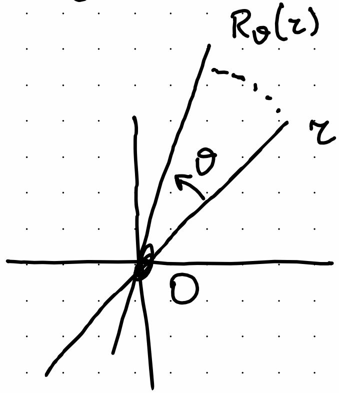
$\langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \dots, \langle v_n \rangle$

sono <u>invarianti</u> per $\mathcal{L}$. Si chiamano <u>assi di simmetria</u>



$\underline{Es}$: $\mathcal{L} = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

è diagonalizzabile? Se e solo se $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.



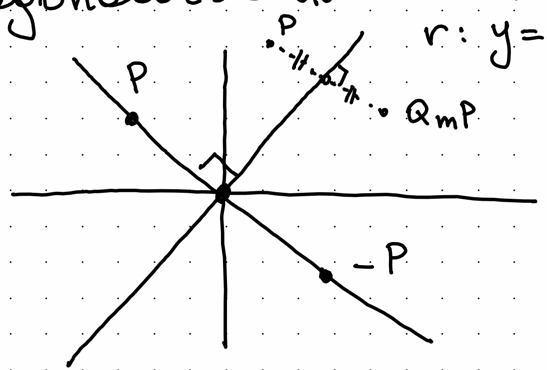
Se $\theta = 0$ $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonale

Se $\theta = \pi$ $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

è diagonale.

$\underline{Es}$: $Q_m = \dfrac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

sono diagonalizzabili $\forall m$:



$r: y = mx$ r e $r^\perp$ sono rette invarianti per Q_m:

$Q_m|_r = 1$

$Q_m|_{r^\perp} = -1$

Autovettori ed autovalori

Def: Un <u>autovettore di autovalore λ</u> per $\mathcal{L}: V \to V$ è un vettore <u>non-nullo</u> $v \in V$ tale che

$$\mathcal{L}(v) = \lambda v.$$

Riformulando:

$\mathcal{L}$ è diagonalizzabile se esiste una base di V composta di autovettori per $\mathcal{L}$.

Oss: Se A è una matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ in una base di V allora $\mathcal{L}: V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile.

$\Rightarrow$ Da adesso in poi lavoriamo con le matrici.

Una matrice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile se $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è diagonalizzabile se $\exists$ base $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathbb{K}^n$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$AX_i = \lambda_i X_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

<u>Problema</u>: Come sono fatte le matrici diagonalizzabili?

È vero che ogni matrice ammette un autovettore?

<u>Es</u>: Sia $S = \begin{pmatrix} s_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & s_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & s_{nn} \end{pmatrix}$ Triangolare superiore.

S ha un autovettore? Sì! $Se_1 = S^1 = s_{11} e_1$.

<u>Es</u>: R_θ non ha autovettori in $\mathbb{R}^2$ se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

Sia v un autovettore per A di autovalore λ. Allora

$$Av = \lambda v$$

$$\iff \quad \lambda v - Av = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\iff \quad (\lambda \mathbb{1}_n - A)v = 0_{\mathbb{K}^n}$$

$$\iff \quad v \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

Quindi,
esiste un autovettore di autovalore λ se e solo se $\operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq 0$.
Più precisamente,

$$\operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) = \{ v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v \}$$

I vettori non-nulli di $\operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A)$ sono gli autovettori di A di autovalore λ.

$$\operatorname{Ker}(\lambda \mathbb{1}_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = 0$$

Studiamo la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto P_A(x) := \det(x \mathbb{1}_n - A) \end{aligned}$$

$$P_A(x) := \det(x\mathbb{1}_n - A)$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix} = (x-a)(x-d) - bc$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc$$

$$= x^2 - \mathrm{Tr}(A)\,x + \det(A)$$

$\mathrm{Tr}(A) =$ traccia di A. $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Es: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & -4 & x-3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-1) \det \begin{pmatrix} x-2 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix}$$

Sviluppo la 1ª colonna

$$= (x-1)\left[(x-2)(x-3) - 8 \right]$$

$$= (x-1)\left[x^2 \underbrace{-5}_{\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} x \underbrace{-2}_{\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} \right] = x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

$P_A(x)$ è un polinomio monico di grado 3.

(il coeff. di x^3 è 1).

Prop.: Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sia $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Allora

$$P_A(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ +}}{} x^3 \underset{\substack{\uparrow \\ -}}{-} Tr(A)\, x^2 \underset{\substack{\uparrow \\ +}}{+} \frac{1}{2}\left[Tr(A)^2 - Tr(A^2) \right] x \underset{\substack{\uparrow \\ -}}{-} \det(A)$$

dim: È un conto che trovate sugli appunti.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$Tr(A) = 1+2+3 = 6 \quad , \quad Tr(A)^2 = 6^2 = 36$$

$$Tr(A^2) = A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = 1 + 12 + 17 = 30$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\Rightarrow \quad P_A(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{1}{2}\left[36 - 30\right] x + 2$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 2$$

Se $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ allora

$$p_A(x) = \det(x\mathbb{1}_n - A)$$

è un <u>polinomio</u>, <u>monico</u> di grado n (= il coeff. di x^n è 1) ed è della forma

$$p_A(x) = x^n - Tr(A)\,x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

<u>Def</u>: Il polinomio $p_A(x)$ si chiama il <u>polinomio caratteristico</u> di A

Quindi,

$\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore per A se e solo se $p_A(\lambda) = 0$ se e solo se λ è una radice del polinomio caratteristico di A.

<u>NB</u>: Alcuni autori pongono $p_A'(x) = \det(A - x\mathbb{1}_n)$

$p_A(x) = (-1)^n p_A'(x)$.

Spettro di una matrice

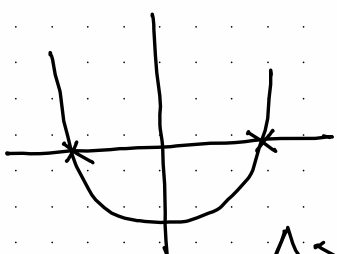
Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Lo <u>spettro di A</u> è l'insieme degli autovalori di A.

$$Sp(A) = \{ \lambda \mid \exists\, v \neq 0_{\mathbb{K}^n} \text{ t.c. } Av = \lambda v \}$$

$$= \{ \lambda \mid p_A(\lambda) = 0 \}$$

<u>Es</u>: Se $n = 2$, $p(x) = ax^2 + bx + c$. Le radici di p sono

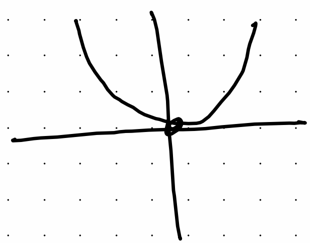
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac = \text{discriminante}$$



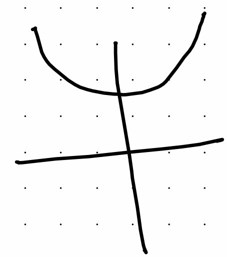
2 radici reali

$\Delta > 0$

caso



1 radice reale



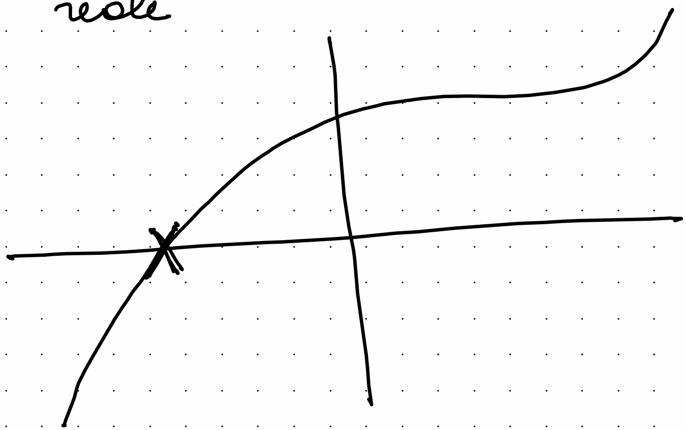
$\Delta < 0$

no radici reali.

$\Delta < 0$ le radici sono complesse coniugate:

$$\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Se $p(x)$ ha grado 3 c'è almeno una radice reale



$(a > 0)$

Teorema fondamentale dell' algebra.

Sia $p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$

Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ t.c.

$$p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$$

Il numero m_i si chiama la <u>molteplicità algebrica</u> di λ_i.

Es: $R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

$$P_{R_\theta}(x) = x^2 - 2\cos\vartheta\, x + 1$$

$$P_{R_\theta}(x) = 0 \iff x = \frac{2\cos\vartheta \pm \sqrt{4\cos^2\vartheta - 4}}{2}$$

$$= \cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta - 1}$$

$$= \cos\vartheta \pm \sqrt{-\sin^2\vartheta}$$

$$= \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta$$

$$Sp(R_\theta) = \{\cos\vartheta + i\sin\theta,\ \cos\vartheta - i\sin\theta\}.$$

$Sp(R_\theta) \subset \mathbb{R} \iff \sin\theta = 0 \iff \theta = 0$ oppure $\theta = \pi$.

Spettro reale:

$$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid p_A(\lambda) = 0 \} \subset Sp_{\mathbb{C}}(A).$$

Es:

$$Sp_{\mathbb{R}}(R_\theta) = \emptyset \quad \text{se } \theta \neq 0 \text{ e } \theta \neq \pi.$$

OSS: Se $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \notin \mathbb{R}$
allora $S_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non è diagonalizzabile.
e diciamo che A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Infatti, $\exists\, X \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ t.c. $AX = \lambda X$.

Proprietà importante del polinomio caratteristico

Prop.: Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine, i.e.

$$P_{B^{-1}AB}(x) = P_A(x)$$

$\forall B$ invertibile.

dim:
$$\begin{aligned} P_{B^{-1}AB}(x) &= \det(x\mathbb{1}_n - B^{-1}AB) \\ &= \det(x B^{-1}B - B^{-1}AB) \\ &= \det(B^{-1}(x\mathbb{1}_n - A)B) \\ &\overset{\text{Binet}}{=} \det(x\mathbb{1}_n - A) = P_A(x) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Molteplicità geometrica

Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sia $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$.

Il sottospazio vettoriale

$$\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbb{1}_n - A) \subseteq \mathbb{K}^n$$

ha come vettori non-nulli gli autovettori per A di autovalore λ.

<u>Notazione</u>: $V_\lambda(A) := \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbb{1}_n - A)$

<u>Def</u>: $V_\lambda(A)$ si chiama l'<u>autospazio</u> di A di autovalore λ.

<u>Def</u>: La <u>molteplicità geometrica</u> di λ è la dimensione di $V_\lambda(A)$,

$$mg_A(\lambda) := \dim V_\lambda(A).$$

Def: La <u>molteplicità algebrica</u> di λ è molteplicità di λ come radice di $p_A(x)$:

$$ma_A(\lambda) = \text{molteplicità algebrica di } \lambda.$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad Sp(A) = \{1\}$$

$$ma_A(1) = 2$$

$$mg_A(1) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbb{1}_2 - A) = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$mg_A(1) < ma_A(1).$$

Prop.: Sia $\lambda \in Sp(A)_{\mathbb{K}}$. Allora
$$mg_A(\lambda) \le ma_A(\lambda).$$

dim: Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $V_\lambda(A)$.
Quindi $k = mg_A(\lambda)$. Quindi
$$(*) \quad Av_i = \lambda v_i.$$
Estendiamola ad una base $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{K}^n$
La matrice che rappresenta A nella base B è
(per via di $(*)$)
$$C = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathbb{1}_k & L \\ \hline 0 & M \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad C = B^{-1}AB \Rightarrow P_A(x) = P_C(x) = (x-\lambda)^k P_M(x)$$

$$\Rightarrow \quad k \le ma_A(\lambda). \qquad \blacksquare$$

__Teorema__: $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se

1) $Sp(A) \subset \mathbb{K}$

2) $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda) \quad \forall \lambda \in Sp(A)$

__dim__:

$\Rightarrow$) Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$, esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{K}^n$ composta di autovettori per A, $Av_i = \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

$B = (v_1 | \dots | v_n) \Rightarrow B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Rightarrow Sp(A) \subset \mathbb{K}$

$$mg_A(\lambda) = \dim V_\lambda(A) = \dim V_\lambda(B^{-1}AB) = \dim V_\lambda(D)$$
$$= ma_A(\lambda).$$

$\Leftarrow$) Viceversa, se $Sp(A) \subset \mathbb{K}$ e $mg_A(\lambda) = ma_A(\lambda)$ $\forall \lambda \in Sp(A)$, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A.

Dimostriamo che

$$\mathbb{K}^n = V_{\lambda_1}(A) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}(A)$$

Infatti,

1) $V_{\lambda_i}(A) \cap V_{\lambda_j}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$.

2) $$\dim \left(V_{\lambda_1}(A) + \dots + V_{\lambda_k}(A) \right) \overset{\text{Grassmann}}{=}$$

$$= \dim V_{\lambda_1}(A) + \dim V_{\lambda_2}(A) + \dots + \dim V_{\lambda_k}(A)$$

$$= mg_A(\lambda_1) + mg_A(\lambda_2) + \dots + mg_A(\lambda_k)$$

$$= ma_A(\lambda_1) + ma_A(\lambda_2) + \dots + ma_A(\lambda_k) = n.$$

Posto $\mathcal{B}_{\lambda_i}$ una base di $V_{\lambda_i}(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$ è una base di autovettori. $\blacksquare$