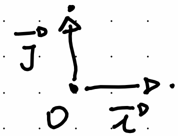
Ancora sulla geometria analitica del piano = di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

$$(V_O^2, \cdot) \xrightarrow[F_{\mathcal{B}}]{\sim} (\mathbb{R}^2, \cdot) \qquad \mathcal{B} =$$



$$X \cdot Y = X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 . \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \qquad \operatorname{dist}(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(\vec{OP}), \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = F_{\mathcal{B}}(\vec{OQ})$$

$$\cos \widehat{vw} = \frac{v \cdot w}{\|v\| \, \|w\|}$$

$r: \; ax + by = c$ $\qquad \boxed{r: \; n \cdot X = c}$ dove $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = vettore normale alla retta.

Asse di un segmento

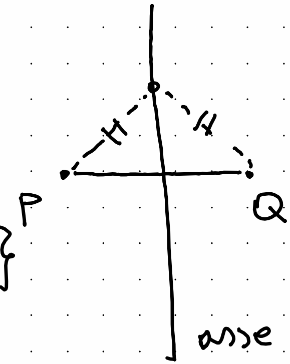
Siano $P \neq Q \in \mathcal{E}^2$.

Asse del segmento $\overline{PQ} =$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}(X, P) = \text{dist}(X, Q) \}$$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X - P\| = \|X - Q\| \}$$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X - P\|^2 = \|X - Q\|^2 \}.$$



asse del segmento.

$$\|X - P\|^2 = (X - P) \cdot (X - P) = X^2 - 2 X \cdot P + P^2$$

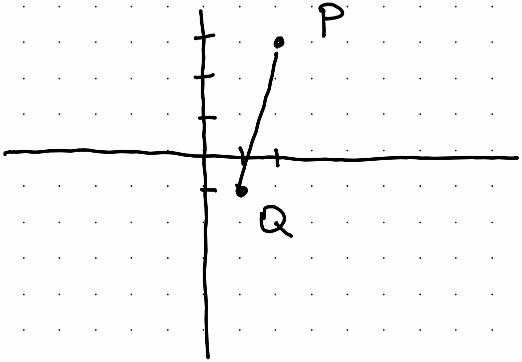
$$\|X - Q\|^2 = (X - Q) \cdot (X - Q) = X^2 - 2 X \cdot Q + Q^2$$

$$\|X - Q\|^2 = \|X - P\|^2 \iff \underbrace{2 (P - Q)}_{n} \cdot X = \underbrace{P^2 - Q^2}_{= c} :$$

eq. cartesiana dell'asse del segmento.

<u>oss</u>: $X = tP + (1-t)Q \in$ asse $\iff X = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q =$ punto medio del segmento.

<u>Es</u>: $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



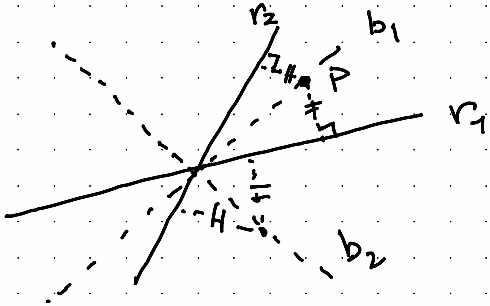
Asse: $2\,(P-Q)\cdot X = P^2 - Q^2$

ovvero

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot X = 13 - 2$$

Asse: $2x + 8y = 11$.

Bisettrice di due rette



$$r_1 : n_1 \cdot X = c_1$$

$$r_2 : n_2 \cdot X = c_2$$

bisettrice =

$$= \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}(X, r_1) = \operatorname{dist}(X, r_2) \}$$

Ricordiamo che $\operatorname{dist}(P, r_1) = \dfrac{|P \cdot n_1 - c_1|}{\|n_1\|}$

(Se $r: ax + by = c$, $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{dist}(P, r) = \dfrac{|a x_0 + b y_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

Supponiamo $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$

$$\operatorname{dist}(X, r_1) = \operatorname{dist}(X, r_2) \iff |X \cdot n_1 - c_1| = |X \cdot n_2 - c_2|$$

$$\iff X \cdot n_1 - c_1 = \pm (X \cdot n_2 - c_2)$$

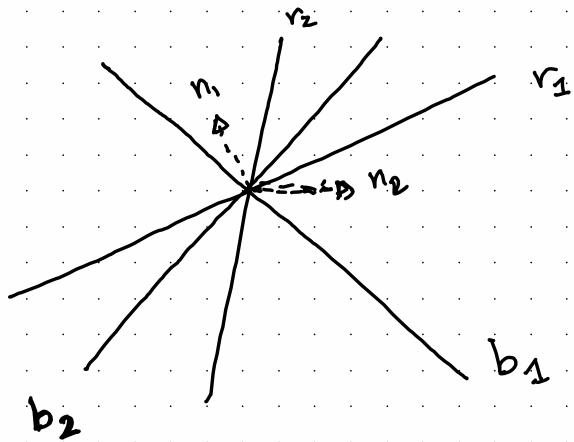
$$\iff X \cdot (n_1 + n_2) = c_1 + c_2 \quad \text{oppure}$$

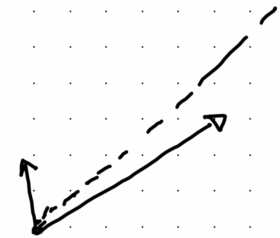
$$X \cdot (n_1 - n_2) = c_1 - c_2$$

Due rette. Perché? Le bisettrici sono due:

$b_1 \quad : \quad (n_1 + n_2) \cdot X = c_1 + c_2$

$b_2 \quad : \quad (n_1 - n_2) \cdot X = c_1 - c_2$

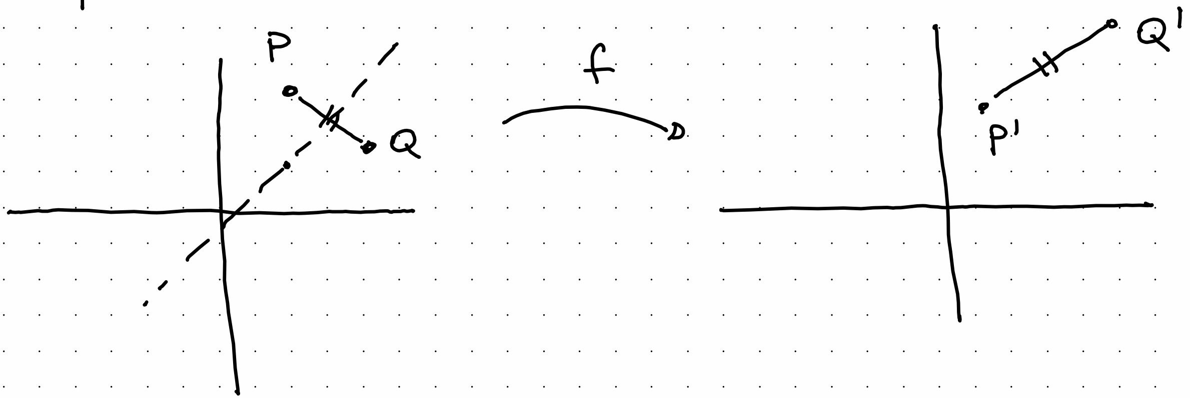




<u>oss</u> : Se v_1 è il <u>versore</u> direttore di r_1 e
v_2 è il <u>versore</u> direttore di r_2 allora
b_2 ha versore direttore $v_1 + v_2$
b_1 ha versore direttore $v_1 - v_2$

Isometrie del piano

Come sono fatte le trasformazioni del piano che preservano le distanze?



Ci aspettiamo:
1) traslazioni.
2) Rotazioni
3) Riflessioni

Def: Una isometria di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ è una funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tale

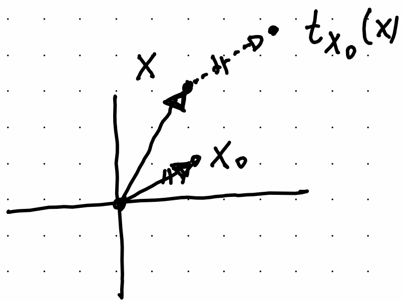
$$\mathrm{dist}\big(f(X), f(Y)\big) = \mathrm{dist}\,(X, Y) \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2.$$

ovvero

$$\| f(X) - f(Y) \| = \| X - Y \| \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2.$$

Es: Sia $X_0 \in \mathbb{R}^2$. La traslazione per X_0 è la funzione

$$t_{X_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$X \mapsto X + X_0$$



- t_{X_0} è un'isometria:

$$\| t_{X_0}(X) - t_{X_0}(Y) \| = \| X + X_0 - Y - X_0 \| = \| X - Y \|$$

- Se $X_0 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ allora t_{X_0} non è lineare.

$$\big(t_{X_0}(0) = X_0 \neq 0 \big).$$

Prop.: Sia f un'isometria t.c. $f(0) = 0$. Allora

1) f preserva il prodotto scalare, i.e.

$$f(X) \cdot f(Y) = X \cdot Y \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$$

2) f è lineare.

dim (Note).

Osservazioni: •) La composizione di isometrie è un'isometria [Esercizio!]

•) Ogni isometria $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è la composizione di una traslazione e di un'isometria lineare:

Poniamo $\mathcal{L}(X) = f(X) - f(0)$. Allora $f(X) = t_{f(0)}(\mathcal{L}(X))$, $\mathcal{L}(0) = 0$, $\mathcal{L}$ è un'isometria lineare.

$$\Rightarrow \quad \boxed{f = t_{f(0)} \circ \mathcal{L}}$$

•) Le isometrie sono invertibili :

Infatti, se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un' isometria e $f(X)=f(Y)$
allora $0 = \| f(X)-f(Y)\| = \|X-Y\| \Rightarrow X=Y$

$\Rightarrow$ f è iniettiva.

$$f = t_{f(0)} \circ \mathcal{L} \underset{\substack{\uparrow \\ t_{f(0)} \text{ è invertibile}}}{\Rightarrow} \mathcal{L} \text{ è iniettiva} \overset{\text{lineare}}{\Rightarrow} \mathcal{L} \text{ è un iso}$$

$\Rightarrow$ f è iso perché composizione di isomorfismi.

•) Se $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è lineare, allora
$\mathcal{L}$ è isometria $\Leftrightarrow$ $\| \mathcal{L}(X) \| = \|X\| \quad \forall X \in \mathbb{R}^2$.

Isometrie lineari

Sono le isometrie che fissano l'origine.

Sia $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometria lineare.

Allora $\mathcal{L} = S_A$, dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{L}(X) \cdot \mathcal{L}(Y) = X \cdot Y \qquad \forall X, Y$$

$$\Leftrightarrow \quad AX \cdot AY = X \cdot Y \qquad \forall X, Y$$

$$\Leftrightarrow \quad X^t A^t A Y = X^t Y \qquad \forall X, Y.$$

$$\Leftrightarrow \quad e_1 A^t A e_1 = 1 \qquad e_1 A^t A e_2 = 0$$

$$e_2 A^t A e_1 = 0 \qquad e_2 A^t A e_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A^t A = \mathbb{1}_2} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} = A^t.$$

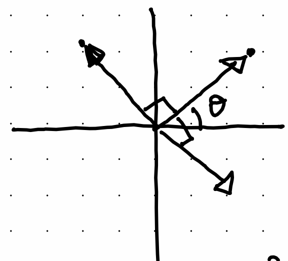
Def: Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice <u>ORTOGONALE</u> se $\boxed{A^t A = \mathbb{1}_n} \Leftrightarrow \boxed{A^{-1} = A^t}$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice ortogonale:

$$A A^t = \mathbb{1}_n . \qquad (A^1 | A^2) \begin{pmatrix} (A^1)^t \\ \hline (A^2)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{A^1 \cdot A^1 = 1}_{\|A^1\| = 1} , \quad \underbrace{A^1 \cdot A^2 = 0}_{A^1 \perp A^2} , \quad \underbrace{A^2 \cdot A^2 = 1}_{\|A^2\| = 1}$$

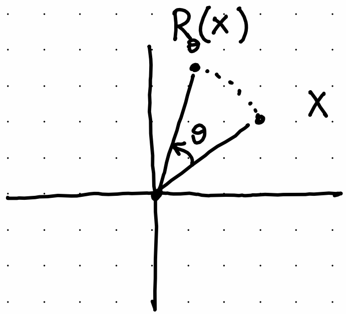
$$A^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

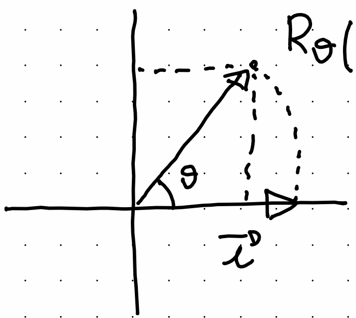


$$A^2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

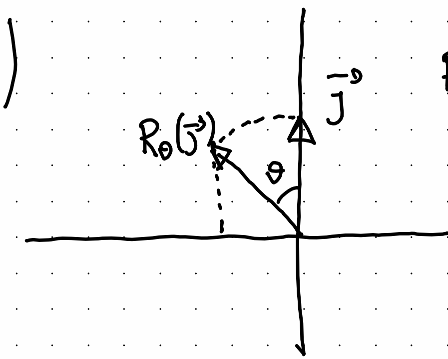
$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\det = 1} \quad \text{oppure} \quad \underbrace{A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\det = -1}$$

Matrici di rotazione





$$R_\theta(\vec{\imath}) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$



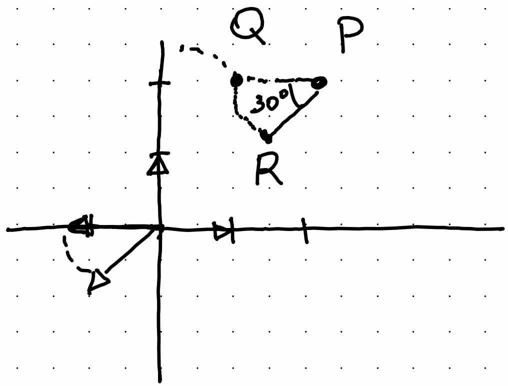
$$R_\theta(\vec{\jmath}) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

: matrice di rotazione di un angolo θ in senso anti-orario.

<u>Es</u>: Sia $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trovare il punto ottenuto ruotando Q di 30° in senso anti-orario attorno al punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Sol.</u>:



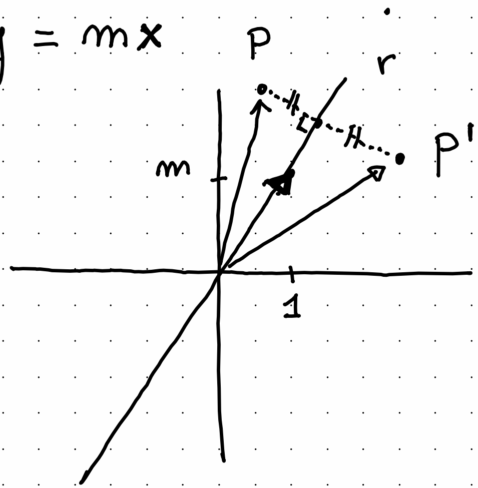
R è il punto cercato

$$R = P + R_{30°}(Q-P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Matrici di riflessione ortogonale attraverso una retta

Sia $r: y = mx$



La riflessione ortogonale attraverso r è la funzione

$$\Phi_m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$P \longmapsto P'$$

$$\Phi_m(P) = 2\, pr_{(\hat{m})}(P) - P$$

$$\Phi_m(e_1) = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 \\ 2m \end{pmatrix}$$

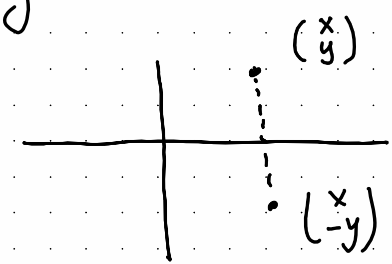
$$\Phi_m(e_2) = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 2m \\ m^2-1 \end{pmatrix}$$

Poniamo

$$Q_m = \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

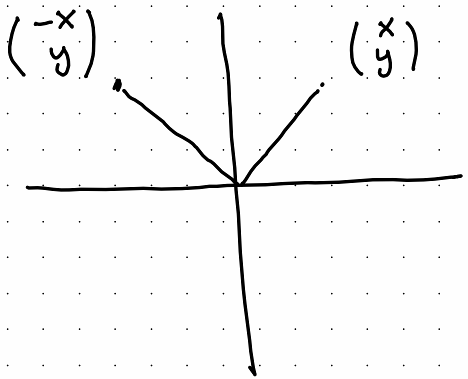
è la matrice di riflessione ortogonale rispetto alla retta $y = mx$.

<u>Es</u>: $Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



La matrice di riflessione attraverso $X=0$ è

$$Q_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



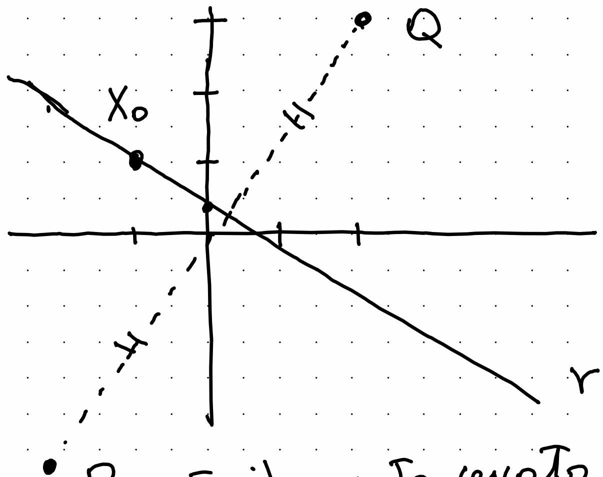
OSS:

$$Q_m = \frac{1}{m^2+1} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

dove $m = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Es: Sia $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trovare il punto ottenuto riflettendo ortogonalmente Q attraverso la retta $r: 2x+3y=1$

Sol.:



R è il punto cercato

$r: \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
ha pendenza
$m = -\frac{2}{3}$
e passa per
$X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$r_0: \quad y = -\frac{2}{3}x$

$$R = X_0 + R_{-\frac{2}{3}}(Q - X_0)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\frac{4}{9}+1} \begin{pmatrix} 5/9 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{9}{13} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{46}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -22 \\ -33 \end{pmatrix}$$

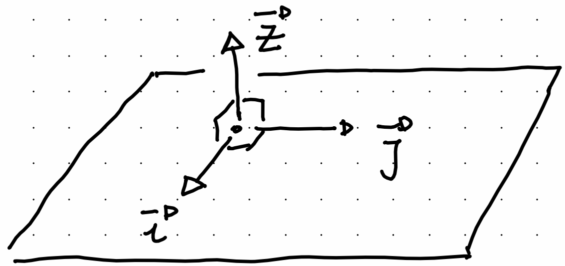
Geometria dello spazio

$$(\mathbb{R}^3, \cdot) \xleftarrow[F_{\mathcal{B}}]{\sim} (\mathcal{V}_0^3, \cdot)$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP}||\vec{OQ}| \cos \widehat{PQ}$$

$\mathcal{B} =$

regola della mano destra



$\mathcal{B} =$ base ortonormale standard di $\mathcal{V}_0^3$.

Prodotto vettore o vettoriale

Siano $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Il loro prodotto vettoriale o vettore è il vettore

$$v \wedge w \ (= v \times w) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -1 \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -10 \\ \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 7 \end{pmatrix}$$

sviluppando la 3^a colonna

$$(v \wedge w) \cdot z = \det \left(v \,|\, w \,|\, z \right)$$

Siano $r_1 = X_0 + \langle v \rangle$ e $r_2 = Y_0 + \langle w \rangle$.

Allora

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \frac{|\det(X_0 - Y_0 \,|\, v \,|\, w)|}{\| v \wedge w \|} = \frac{|(X_0 - Y_0) \cdot v \wedge w|}{\| v \wedge w \|}.$$