Domande / Commenti / Suggerimenti ?

Richiami: Uno spazio euclideo è una coppia $(V, s)$, dove $V$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale f.g. e $s: V \times V \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare, ovvero ha le seguenti proprietà:

1) $s$ è bilineare
2) $s$ è simmetrica
3) $s$ è definita positiva e non-degenere che vuol dire
$$s(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in V, \quad s(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V.$$

Se $U \subset V$ è un s.sp. vettoriale, allora
$$V = U \oplus U^\perp$$
dove $U^\perp = \{ v \in V \mid s(v,u) = 0 \ \forall u \in U \}$.

La proiezione ortogonale su $U$ è la proiezione su $U$ lungo $U^\perp$
$$pr_U : V \to V$$
$$v = u_1 + u_2 \mapsto u_1 \qquad u_1 \in U, \ u_2 \in U^\perp$$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_K\}$ è una base <u>ortogonale</u> di $U$, allora

$$pr_U(v) = \frac{s(v,v_1)}{v_1^2} v_1 + \frac{s(v,v_2)}{v_2^2} v_2 + \dots + \frac{s(v,v_K)}{v_K^2} v_K$$

i coefficienti $\frac{s(v,v_i)}{v_i^2}$ si chiamano i coefficienti di Fourier di $pr_U(v)$ nella base $\mathcal{B}$.

<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^n$, $s = b_{\mathbb{1}_n} = \cdot$ $(X \cdot Y = X^t Y)$, sia $U \leq V$ s.sp. vett.,

$\mathcal{B} = \{q_1, \dots, q_r\}$ base <u>ortonormale</u> di $U$, i.e.

$$(*) \quad \begin{aligned} q_i \cdot q_j &= q_i^t q_j = 0 \quad \text{se } i \neq j, \\ q_i \cdot q_i &= q_i^t q_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

$Q = (q_1 | \dots | q_r) \in Mat_{n \times r}(\mathbb{R})$, $rg(Q) = r$

($S_Q$ è iniettiva). Allora $(*)$ è equivalente a

$$Q^t Q = \mathbb{1}_r$$

Infatti,
$$\begin{pmatrix} q_1^t \\ \hline q_2^t \\ \hline \vdots \\ \hline q_r^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 | q_2 | \dots | q_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_r$$

Sia $v \in \mathbb{R}^n$,

$$pr_U(v) = (v \cdot q_1)\, q_1 + (v \cdot q_2)\, q_2 + \dots + (v \cdot q_r)\, q_r$$

$$= \left( q_1 \,|\, q_2 \,|\, \dots \,|\, q_r \right) \begin{pmatrix} v \cdot q_1 \\ v \cdot q_2 \\ \vdots \\ v \cdot q_r \end{pmatrix} =$$

$$= Q \begin{pmatrix} q_1^t v \\ q_2^t v \\ \vdots \\ q_r^t v \end{pmatrix} =$$

$$= Q\, Q^t\, v$$

<u>OSS</u>: $Q^t Q = \mathbb{1}_r$ , $\underset{n\times r}{Q}\,\underset{r\times n}{Q^t}$ è $n \times n$ "complicata"

$$\Rightarrow \quad \boxed{pr_U(v) = Q\, Q^t\, v}$$

<u>Es</u>: $\quad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3. \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Una base ortonormale di $U$ è

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \qquad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$Q^t Q = \frac{1}{\sqrt{3}} (1,1,1) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

$$Q Q^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,1,1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$pr_U(v) = Q Q^t v = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \checkmark$$

$$pr_U(v) = \frac{v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

__Teorema__ (Rango di $A^tA$)

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Allora $A^tA \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice simmetrica e

$$rg(A^tA) = rg(A), \quad Ker\, A^tA = Ker\, A.$$

__dim__: • $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA \Rightarrow$ è simmetrica.

• $A^tA$ ha taglia $n\times \cancel{m} \times \cancel{m}\times n = n\times n$.

• $rg\, A^tA = n - \dim Ker\, A^tA$

• $rg\, A \quad = n - \dim Ker\, A$

Teorema della dimensione

Dimostriamo che

$$Ker\, A^tA = Ker\, A \subset \mathbb{R}^n$$

Sia $X \in Ker\, A$, allora $(A^tA)X = A^t(AX) = 0_n \Rightarrow X \in Ker\, A^tA$.

Viceversa, sia $X \in Ker\, A^tA$

$$X \in \operatorname{Ker} A^t A \iff A^t A X = 0_n$$

$$\implies X^t A^t A X = X^t 0_n = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\implies (AX)^t A X = 0$$

$$\implies (AX) \cdot (AX) = 0$$

$$\implies \|AX\| = 0 \implies AX = 0_n$$

$$\implies X \in \operatorname{Ker} A .$$

$\blacksquare$

**Teorema** (Matrice di proiezione ortogonale)

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale, sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_r\}$ una base di $U$, sia $A = (u_1 | \dots | u_r) \in Mat_{n \times r}(\mathbb{R})$.

Allora

$$pr_U(v) = A\,(A^t A)^{-1} A^t\, v$$

La matrice

$$P = A\,(A^t A)^{-1} A^t$$

è quindi la matrice che rappresenta $pr_U$ nella base standard di $\mathbb{R}^n$, i.e. $pr_U = S_P$.

e $P$ si chiama <u>matrice di proiezione ortogonale</u> su $U$

dim: $U = Col(A) = Im(S_A)$.

$$rg(A) = r \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema}}}{=} rg(A^t A) \Rightarrow A^t A \text{ è invertibile.}$$

Quindi, $pr_U(v) = AY$ per qualche $Y$.

$$v - pr_U(v) \in U^\perp$$

$$\Rightarrow \quad (v - pr_U(v)) \cdot AZ = 0 \qquad \forall Z \in \mathbb{R}^r$$

$$\Rightarrow \quad AZ \cdot (v - pr_U(v)) = 0 \qquad \forall Z \in \mathbb{R}^r$$

$$\Rightarrow \quad Z^t A^t (v - AY) = 0 \qquad \forall Z \in \mathbb{R}^r$$

$$\Rightarrow \quad Z^t (A^t v - A^t A Y) = 0 \qquad \forall Z \in \mathbb{R}^r$$

Il vettore $A^t v - A^t A Y$ è ortogonale a tutto $\mathbb{R}^r$.

Quindi $A^t v - A^t A Y = 0_r \Rightarrow A^t v = A^t A Y$

$$\Rightarrow \boxed{Y = (A^t A)^{-1} A^t v} \Rightarrow pr_U(v) = AY = A (A^t A)^{-1} A^t v.$$

$\blacksquare$

$\underline{\text{Es}}$: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = A\,(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( (1,1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1,1,1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{3} \right) (1,1,1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,1,1)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\underline{\text{Es}}$: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P = A\,(A^tA)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Distanza in uno spazio euclideo

Sia $(V, s)$ uno spazio euclideo.

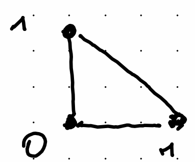
**Def**: La distanza tra due vettori $v, u \in V$ è il numero

$$\operatorname{dist}(v,u) := \|v-u\| = \sqrt{s(v-u, v-u)}$$

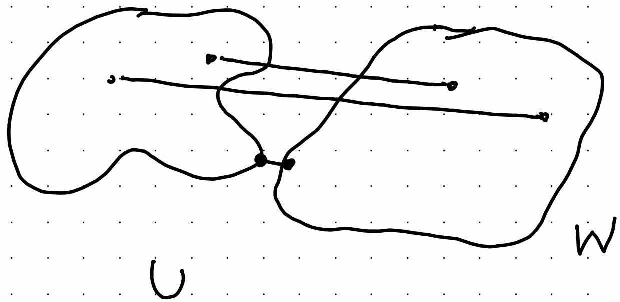
**oss**:
- $\operatorname{dist} : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- dist dipende dal prodotto scalare $s$
- $\operatorname{dist}(v,u) = 0 \iff \|v-u\| = 0 \iff v-u = 0_V \iff v = u$.
- dist è invariante per traslazioni:

  $\operatorname{dist}(v+v_0, u+u_0) = \operatorname{dist}(v,u)$

**Es**: $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ : $\operatorname{dist}(e_1, e_2) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$



## Distanza tra sottospazi affini




$\text{dist}(U, W) = ?$

**Def:** Siano $U, W \subset V$ due sottospazi affini. Definiamo

$$\text{dist}(U, W) = \min_{\substack{u \in U \\ w \in W}} \text{dist}(u, w)$$

$$= \min_{u \in U, w \in W} \|u - w\|$$

distanza tra sottospazi affini.

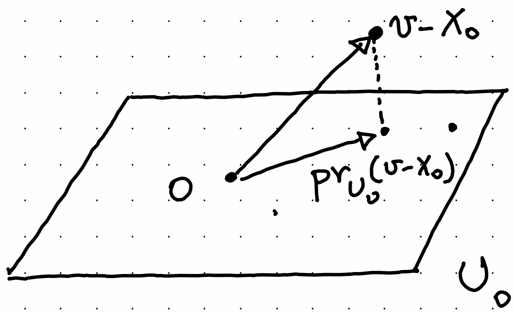
# Distanza punto-sottospazio affine

Siano $v \in V$ e $U = X_0 + U_0$ un s.sp. affine di $V$.

$$\mathrm{dist}(v, U) = \min_{u \in U_0} \mathrm{dist}(v, X_0 + u)$$

$$= \min_{u \in U_0} \mathrm{dist}(v - X_0, u)$$

$$= \mathrm{dist}(v - X_0, U_0)$$ = distanza punto-s.sp. vettoriale



**Teorema**: Sia $v \in V$ e $U_0$ un s.sp. vettoriale di V. Allora

$$\operatorname{dist}(v, U_0) = \| v - pr_{U_0}(v) \|$$

**Teorema di Pitagora**: Siano $v_1, v_2 \in V$ ortogonali, i.e. $S(v_1, v_2) = 0$. Allora

$$\| v_1 + v_2 \|^2 = \| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2$$

**dim**:

$$\| v_1 + v_2 \|^2 = S(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = S(v_1, v_1) + 2 S(v_1, v_2) + S(v_2, v_2)$$

$$\underset{S(v_1, v_2) = 0}{=} \| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2$$

$\boxtimes$

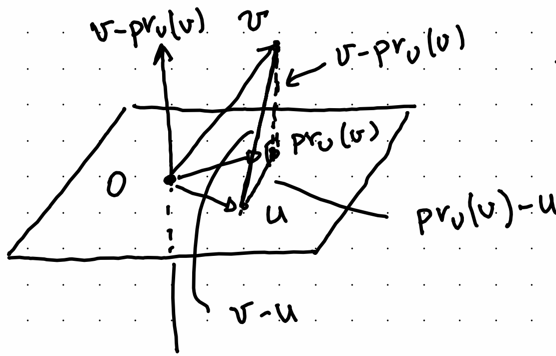
dim (Teorema):

$$\operatorname{dist}(v, U_0) = \min_{u \in U_0} \|v-u\|$$

Sia $u \in U$

Pitagora

$$\|v-u\|^2 = \|\overbrace{v-pr_U(v)}^{\substack{U^\perp \\ \Psi}} + \overbrace{pr_U(v)-u}^{\substack{U \\ \Psi}}\|^2 \stackrel{\swarrow}{=}$$




$$= \|v-pr_U(v)\|^2 + \|pr_U(v)-u\|^2$$

$\Rightarrow \quad \|v-u\|^2 \geq \|v-pr_U(v)\|^2$ e $=$ vale se e solo se

$\|pr_U(v)-u\|^2 = 0 \iff u = pr_U(v)$.

Quindi, $\min_{u \in U_0} \|v-u\| = \|v-pr_U(v)\|$. ∎

**Es:** Calcolare la distanza in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dal sottospazio affine

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

**Sol.:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= X_0} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= U_0}$$

$$\text{dist}(P, U) = \text{dist}(P - X_0, U_0)$$

Es precedente

$$= \| P - X_0 - pr_{U_0}(P - X_0) \| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -8/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \sqrt{8^2 + 1^2 + 7^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{114}$$

# Angoli :

## Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Sia $(V, s)$ uno spazio euclideo, siano $v, u \in V$. Allora

$$|s(v,u)| \leq \|v\| \|u\|$$

dim: Sia $\lambda \in \mathbb{R}$

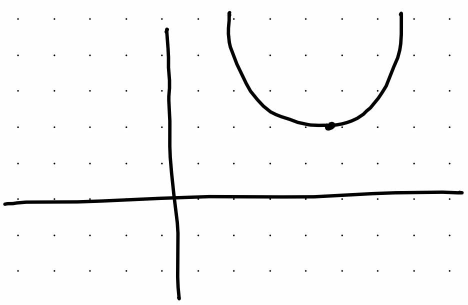
$$\|u+\lambda v\|^2 = s(u+\lambda v, u+\lambda v)$$

$$= u^2 + \lambda^2 v^2 + 2\lambda s(u,v) \geq 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Disuguaglianza fondamentale $\|w\| \geq 0$).

ovvero

$$f(\lambda) = \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda s(u,v) \geq 0$$



$$\iff \quad 4 s(u,v)^2 - 4\|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0$$

$$\iff \quad s(u,v)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 .$$

$\blacksquare$

Conseguenze: se $u, v \neq 0_V$, allora

$$-1 \leq \frac{s(u,v)}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

La funzione $f(u,v) = \frac{s(u,v)}{\|u\|\|v\|}$ ha le proprietà:

1) $-1 \leq f(u,v) \leq 1$
2) $f(u,v) = 0$ se $u \perp v$
3) $f(\lambda u, v) = f(u,v) \quad \forall \lambda \geq 0$.
4) $f(u,v) = f(v,u)$.

$f$ è un coseno.

Def: L'angolo tra $u, v \in V$, $u, v \neq 0_V$ è il numero $\theta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$\cos\theta = \frac{s(u,v)}{\|u\|\|v\|}$$