Spazi Euclidei

Sia V uno spazio vettoriale reale f.g.
Un prodotto scalare su V è una forma bilineare

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

simmetrica e definita positiva.
Quindi s ha le seguenti proprietà

1) s è bilineare
2) s è simmetrica ($s(v,w) = s(w,v)$ $\forall v, w \in V$).
3) $sg(s) = (n, 0)$ dove $n = \dim V$. (s è definita positiva).

Riformuliamo (3):

a) $\operatorname{Ker}(s) = \{0_V\}$, ovvero s è non-degenere, quindi
$s(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \Rightarrow v = 0_V$.

b) $s(v,v) = v^2 \geq 0 \quad \forall v \in V$.

s è definita positiva $\Leftrightarrow$ s soddisfa a) e b):

$\Leftarrow$) Se $\operatorname{Ker}(s) = \{0\}$ e tutti i quadrati sono positivi, allora se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di (V,s)
$v_1^2 > 0, \dots, v_n^2 > 0$. Quindi $sg(s) = (n,0)$.

$\Rightarrow$) Se s è definita positiva, allora $\operatorname{Ker}(s) = \{0_V\}$ e se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di (V,s), e $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$ allora

$$v^2 = (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ s(v_i,v_j)=0 \ i \neq j}}{=} x_1^2 \underset{\substack{\vee \\ 0}}{v_1^2} + \dots + x_n^2 \underset{\substack{\vee \\ 0}}{v_n^2} \geq 0$$

$\blacksquare$

Un <u>prodotto scalare</u> su V è una funzione

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà

1) s è bilineare
2) s è simmetrica
3) $s(v,v) \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $s(v,v) = 0 \iff v = 0_V$.

<u>Def</u>: La <u>norma</u> di $v \in V$ in (V, s) è il numero

$$\|v\| = \sqrt{v^2} = \sqrt{s(v,v)}$$

<u>Def</u>: La coppia (V, s) si chiama uno <u>spazio euclideo</u>.

Es: $V = \mathbb{R}^n$, $b = b_{\mathbb{1}_n} : V \times V \to \mathbb{R}$

$$b_{\mathbb{1}_n}(X, Y) = X^t \mathbb{1}_n Y = X^t Y = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Notazione: $X \cdot Y = X^t Y$ "prodotto puntino" = "Dot product".

$\cdot$ = prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.

In $(\mathbb{R}^n, \cdot)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

OSS: Il prodotto $\cdot$ è un prodotto scalare.
Infatti, $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$
e $e_i^2 = 1 > 0$ $\forall\, i = 1, \dots, n$.

Es: $n=2$: $(\mathbb{R}^2, \cdot)$:

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad X \cdot Y =$ " X scalar Y " = " X puntino Y "

$= -7$

$$\left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

Es: $n=3$ $(\mathbb{R}^3, \cdot)$:

$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad X \cdot Y = -4 + 5 - 18 = -17$

$$\| X \| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}$$

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ e consideriamo

$$b_{0,1,2,\dots,n}(p(x),q(x)) = p(0)q(0)+p(1)q(1)+\dots+p(n)q(n)$$

è un prodotto scalare (prodotto scalare di Lagrange)

Es: $n=2$

$$b_{0,1,2}(x^2+1,\ x-2) = 1\cdot(-2)+(2)\cdot(-1)+5\cdot 0 = -4.$$

La base dei polinomi

$$\{(x-1)(x-2)\cdots(x-n),\ x(x-2)(x-3)\cdots(x-n),\ x(x-1)(x-3)\cdots(x-n),\ \dots\}$$

è una base ortogonale di $(V, b_{0,\dots,n})$.

Es: $V = \mathcal{C}^0([-\pi,\pi], \mathbb{R})$, il prodotto L_2:

$$(f|g)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

è simmetrico, bilineare, $(f|f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \geq 0$

$(f|f) = 0 \iff f = 0$.

Quindi è un prodotto scalare (Analisi Fourier)

$$(\cos x | \sin x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,dx = 0$$

$(-|-)_{L^2} : V \times V \to \mathbb{R}$

$\cos x, \sin x$ sono ortogonali in $(V, \overline{(-|-)}_{L^2})$.

$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$.

è una base ortogonale $\forall n$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx = 0 \quad \forall n,m.$

La proiezione ortogonale

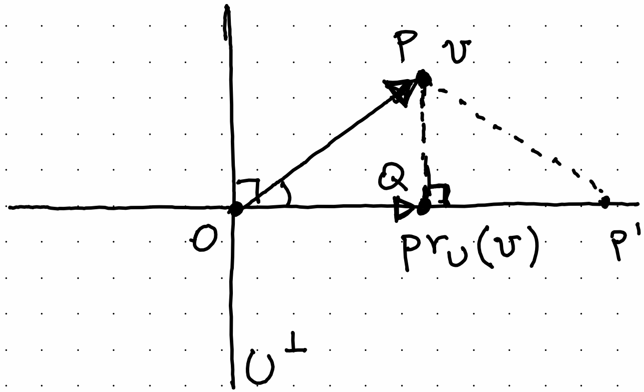
Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di V.
Consideriamo la decomposizione ortogonale
$$V = U \oplus U^\perp$$
in (V, s). La <u>proiezione ortogonale</u> su U è la funzione $pr_U^{U^\perp}$ ovvero

$$pr_U^{U^\perp} : V \longrightarrow V$$
$$v = u + u' \longmapsto u$$

<u>Notazione</u>: $\quad pr_U := pr_U^{U^\perp}$.

Es:

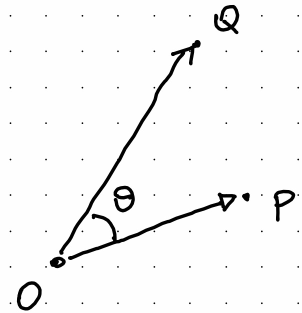
$(V_0^2, \cdot)$



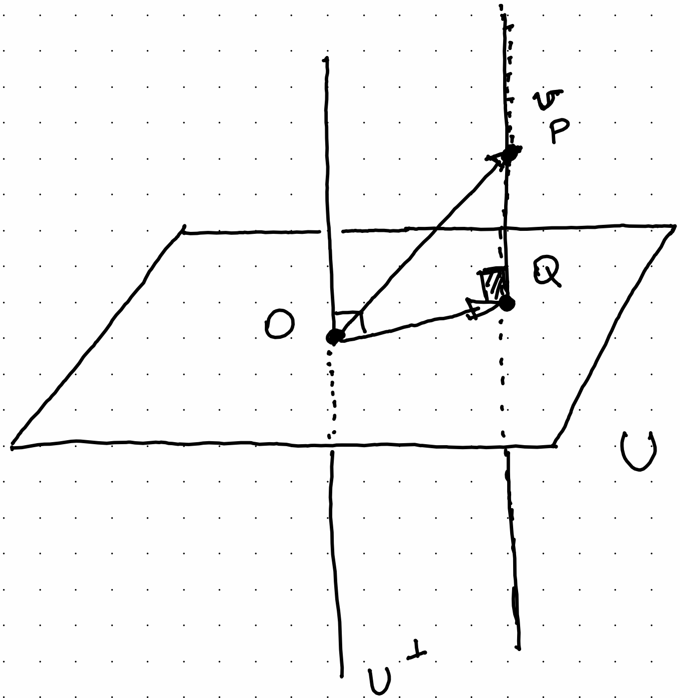
$pr_U(v) = \overrightarrow{OQ}$

$U = r$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} := |\overline{OP}|\,|\overline{OQ}| \cos\theta$$



<u>Es</u> :



$pr_U(v) = \overrightarrow{OQ}$

$\dim U = 2$

$\dim U^\perp = 3-2 = 1$

OSS : Se $v \in V$, allora $v - pr_U(v) \in U^\perp$.

Insiemi ortogonali :

Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ si dice **ortogonale** se

- $s(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$
- $v_i^2 \neq 0$ (ovvero $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0_V\}$).

Un insieme ortogonale è linearmente indipendente:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0_V$$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n$:

$$0 = s(0_V, v_i) = s(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_i) = x_1 s(v_1, v_i) +$$
$$+ x_2 s(v_2, v_i) + \dots + x_i s(v_i, v_i) + \dots + x_n s(v_n, v_i)$$
$$= x_i \underbrace{v_i^2}_{\neq 0} \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \qquad \blacksquare$$

Coefficienti di Fourier

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, s).

Sia $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Allora

$$x_i = \frac{s(v, v_i)}{s(v_i, v_i)}$$: coefficienti di Fourier di v nella base $\mathcal{B}$

dim: $\forall i = 1, \dots, n$, calcoliamo

$$s(v, v_i) = s(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_i) = x_i\, s(v_i, v_i)$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{s(v, v_i)}{s(v_i, v_i)}$$

$\blacksquare$

Tecnica di calcolo di $pr_U(v)$ [con basi ortogonali]

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale.
Sia $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una base ortogonale di U.
Allora, dato $v \in V$,

$$pr_U(v) = \frac{s(v, v_1)}{v_1^2} v_1 + \frac{s(v, v_2)}{v_2^2} v_2 + \ldots + \frac{s(v, v_k)}{v_k^2} v_k$$

dim:

Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}'$ una base di $V = U \oplus U^\perp$ ottenuta aggiungendo a $\mathcal{B}_U$ una base $\mathcal{B}'$ di $U^\perp$.

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k + v' \qquad \text{dove } v' \in U^\perp$$

Allora

$$s(v, v_i) = s(x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k + v', v_i) \overset{v' \in U^\perp}{=} x_i v_i^2$$

$$\Rightarrow \quad pr_U(v) = x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{s(v, v_i)}{v_i^2} v_i .$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: ·) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ in $\mathbb{R}^3$. In $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ calcoliamo

$$pr_U\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

·) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

$$pr_U\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è ortogonale in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$

$$= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Basi ortonormali di (V, s)

Una base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ di V si dice una base ortonormale di (V, s) se

1) $\mathcal{E}$ è una base ortogonale, $s(E_i, E_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

2) $E_i^2 = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\Leftrightarrow \|E_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n)$.

OSS: Se $v \in V$, $v \neq 0_V$ allora

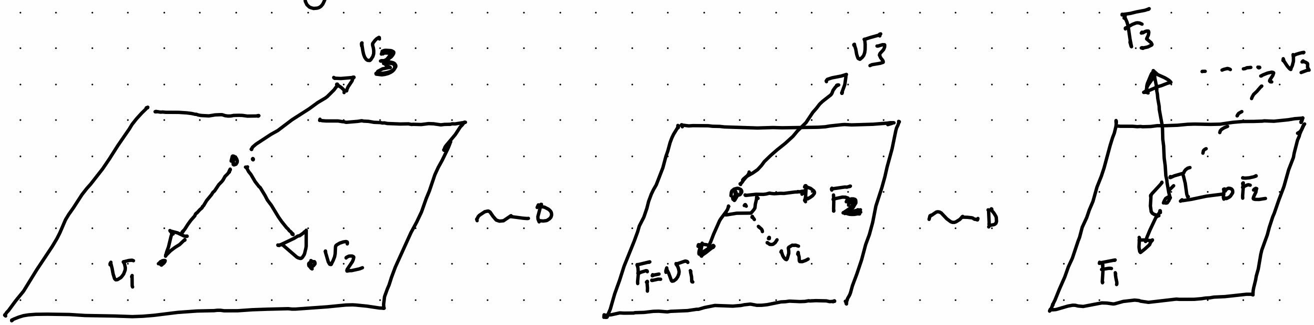
$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \sqrt{s\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\|v\|^2} s(v, v)} =$$

$$= \frac{1}{\|v\|} \sqrt{s(v, v)} = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

Un vettore E t.c. $\|E\| = 1$ si chiama versore.

Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Idea: Data una base $\mathcal{B}$ di V qualunque "raddrizzarla" per ottenere una base ortogonale:



$\{v_1, v_2, v_3\} \rightsquigarrow \{F_1, F_2, F_3\}$:
1) ortogonale
2) $\langle F_1, F_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
3) $v_i \cdot F_i > 0$

$\rightsquigarrow \left\{ E_1 = \dfrac{F_1}{\|F_1\|},\ E_2 = \dfrac{F_2}{\|F_2\|},\ E_3 = \dfrac{F_3}{\|F_3\|} \right\}$: Base di Gram-Schmidt associata a $\mathcal{B}$

<u>Teorema</u>: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Allora esiste un'unica base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ di V t.c.

1) $\mathcal{E}$ è una base ortonormale di (V, s)
2) $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle E_1, \dots, E_i \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n.$
3) $E_i \cdot v_i > 0$

Inoltre $\mathcal{E}$ si trova con il seguente algoritmo:

Poniamo ·) $F_1 := v_1$

·) $F_{i+1} := v_{i+1} - pr_{\langle F_1, \dots, F_i \rangle}(v_{i+1})$

$$= v_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{s(v_{i+1}, F_k)}{F_k^2} \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Per ottenere $\mathcal{E}$, dividiamo per le norme:

$$E_i := \frac{F_i}{\|F_i\|}.$$

Es: Ortonormalizzare la base

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$.

Sol.:

$$F_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1^2} F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1^2} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2^2} F_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} F_1 - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

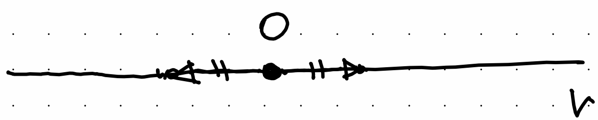
$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{F_1}{\|F_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{F_2}{\|F_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{F_3}{\|F_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Coseni direttori:

Sia $r: ax + by = c$ una retta di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

$$r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle$$

I <u>versori direttori</u> sono $\pm \dfrac{1}{\left\| \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$



$$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

OSS: Sia $E = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Allore E è un versore di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$

se e solo se $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x, y \in [-1, 1]$

$\Rightarrow \exists\ \theta \in [0, 2\pi)$ t.c. $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$

$$\text{Versori di } (\mathbb{R}^2, \cdot) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

In particolare coseni direttori di $ax + by = c$

$$\pm \begin{pmatrix} -b/\sqrt{a^2+b^2} \\ a/\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{dove } \theta$$

è l'angolo che la retta forma con la retta $y = 0$