<u>Richiami</u>: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Sia $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

- $v, w \in V$ sono ortogonali in (V, b) se $b(v, w) = 0$
- Una <u>base ortogonale</u> di (V, b) è una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V t.c. $b(v_i, v_j) = 0 \ \forall i \neq j$.
- $\operatorname{Ker} b = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall w \in V\}$

- <u>Teorema</u>: Esiste una base ortogonale di (V, b).
  1) Trovare una base $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b}$ di $\operatorname{Ker} b$
  2) Scegliere un complementare U di $\operatorname{Ker} b$: $U \oplus \operatorname{Ker} b = V$.
  3) $\exists\, u \in U$ t.c. $u^2 = b(u, u) \neq 0 \Rightarrow \langle u \rangle^\perp \oplus \langle u \rangle = U$

     $\Rightarrow \langle u \rangle^\perp \oplus \langle u \rangle \oplus \operatorname{Ker} b = V$
- <u>Teorema</u> (di decomposizione ortogonale): Se $U \subset V$ s.sp. vettoriale t.c. $b|_U$ è non-degenere ($\Leftrightarrow U \cap U^\perp = \{0_V\}$) allora

  $V = U \oplus U^\perp$ dove $U^\perp = \{v \in V \mid b(v, u) = 0 \ \forall u \in U\}$.

Forme bilineari simmetriche reali

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (è un campo ordinato, $x \geq 0 \Leftrightarrow x = y^2$).
Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare e simmetrica.
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di (V, b).
Dividiamo $\mathcal{B}$ come $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^- \cup \mathcal{B}^0$ dove

$$\mathcal{B}^+ = \{ v_i \in \mathcal{B} \mid v_i^2 > 0 \}$$

$$\mathcal{B}^- = \{ v_i \in \mathcal{B} \mid v_i^2 < 0 \}$$

$$\mathcal{B}^0 = \{ v_i \in \mathcal{B} \mid v_i^2 = 0 \}$$

Sia $p := |\mathcal{B}^+|$, $q = |\mathcal{B}^-|$, $|\mathcal{B}^0| = n - p - q$, dove $n = \dim V$.
La coppia (p, q) si chiama la <u>segnatura</u> della base ortogonale $\mathcal{B}$.

Teorema (di Sylvester o di inerzia)

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due basi ortogonali di (V, b).
Allora $|\mathcal{B}^+| = |\mathcal{C}^+|$, $|\mathcal{B}^-| = |\mathcal{C}^-|$, $|\mathcal{B}^0| = |\mathcal{C}^0| = \dim \operatorname{Ker} b$.
"La segnatura di una base ortogonale non dipende dalla base ortogonale scelta". Questa segnatura si chiama la segnatura di b e la denotiamo con

$$sg(b) = (p, q).$$

<u>dim</u>: Dimostriamo per prima cosa che $\langle \mathcal{B}^0 \rangle = \operatorname{Ker} b$.
Fissiamo le notazioni: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}, v_{p+q+1}, \dots, v_n\}$
dove $\mathcal{B}^+ = \{v_1, \dots, v_p\}$, $\mathcal{B}^- = \{v_{p+1}, \dots, v_{p+q}\}$, $\mathcal{B}^0 = \{v_{p+q+1}, \dots, v_n\}$.
Sia $v \in \operatorname{Ker} b$. Quindi $v = x_1 v_1 + \dots + x_p v_p + x_{p+1} v_{p+1} + \dots + x_{p+q} v_{p+q} + \dots$

$$0 = b(v, v_i) = b(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, v_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{B} \text{ è} \\ \text{ortogonale}}}{=} x_i \, b(v_i, v_i)$$

$\Rightarrow$ Se $v_i \notin \mathcal{B}^0$ allora $x_i = 0$.
$\Rightarrow$ $v \in \langle \mathcal{B}^0 \rangle$.

Viceversa se $v \in \langle \mathcal{B}^0 \rangle$ allora $v = x_{p+q+1} v_{p+q+1} + \dots + x_n v_n$

e $b(v, v_i) = x_{p+q+1} b(v_{p+q+1}, v_i) + \dots + x_n b(v_n, v_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

Se $i < p+q+1$ $\quad b(v, v_i) = 0$ perché $\mathcal{B}$ è ortogonale.

Se $i \geq p+q+1$ allora $b(v_i, v_i) = v_i^2 = 0$ perché $v_i \in \mathcal{B}^0$.

$\Rightarrow b(v, v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

$\Rightarrow b(v, \sum_i x_i v_i) = 0 \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow b(v, w) = 0 \ \forall w \in V.$

$\Rightarrow v \in \operatorname{Ker} b.$

2) $|\mathcal{B}^+| = |\mathcal{C}^+|$ e $|\mathcal{B}^-| = |\mathcal{C}^-|$. Poniamo

$p = |\mathcal{B}^+|$, $p' = |\mathcal{C}^+|$, $q = |\mathcal{B}^-|$, $q' = |\mathcal{C}^-|$.

Osserviamo che $\quad p+q = n - \dim \operatorname{Ker} b = p'+q'$

Poniamo $\mathcal{C}^+ = \{w_1, \dots, w_{p'}\}$, $\mathcal{C}^- = \{w_{p'+1}, \dots, w_{p'+q'}\}$.

(!) Mostriamo che $\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{C}^-$ è linearmente indipendente.

Se vale l'affermazione (!) allora, dato che $\langle \mathcal{B}^+ \cup \mathcal{C}^- \rangle \cap \operatorname{Ker} b = \{0\}$.

$$\left.\begin{aligned} p + q' + (n-p-q) \leq n \quad &\Rightarrow \quad q' \leq q. \\ \text{Similmente, } \ p'+q+(n-p'-q') \leq n \quad &\Rightarrow \quad q \leq q' \end{aligned}\right\} \Rightarrow q = q'$$

$\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{C}^-$ è lin. Ind.:

$$x_1 v_1 + \dots + x_p v_p + y_1 w_{p'+1} + \dots + y_{q'} w_{p'+q'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 v_1 + \dots + x_p v_p = -y_1 w_{p'+1} - \dots - y_{q'} w_{p'+q'} =: u$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = b(x_1 v_1 + \dots + x_p v_p, x_1 v_1 + \dots + x_p v_p) \underset{\mathcal{B} \text{ è ortogonale}}{=} x_1^2 v_1^2 + x_2^2 v_2^2 + \dots + x_p^2 v_p^2$$

$$\Big(p = 2: \quad b(x_1 v_1 + x_2 v_2, x_1 v_1 + x_2 v_2) = b(x_1 v_1, x_1 v_1) + 2\, b(x_1 v_1, x_2 v_2) +$$

$$+\, b(x_2 v_2, x_2 v_2) =$$

$$= x_1^2 v_1^2 + 2\, x_1 x_2\, b(v_1, v_2) + x_2^2 v_2^2 = x_1^2 v_1^2 + x_2^2 v_2^2 \Big)$$

$$u^2 = (-y_{p'+1} w_{p'+1} - \dots - y_{p'+q'} w_{p'+q'})^2 \underset{\mathcal{C} \text{ è ortogonale}}{=} y_1^2 w_{p'+1}^2 + \dots + y_{p'+q'}^2 w_{p'+q'}^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{x_1^2 \underbrace{v_1^2}_{>0} + \dots + x_p^2 \underbrace{v_p^2}_{>0}}_{\geq 0} = \underbrace{y_1^2 \underbrace{w_{p'+1}^2}_{<0} + \dots + y_{p'+q'}^2 \underbrace{w_{p'+q'}^2}_{<0}}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0 = y_1 = y_2 = \dots = y_{p'+q'}. \qquad \blacksquare$$

<u>Def</u>: b si dice ($\dim V = n$)

- .) <u>Definita positiva</u> se $sg(b) = (n, 0)$ [$\dim \operatorname{Ker} b = 0$]
- .) <u>Semidefinita positiva</u> se $sg(b) = (p, 0)$ con $p < n$ [$\dim \operatorname{Ker} b \neq 0$]
- .) <u>Semidefinita negativa</u> se $sg(b) = (0, q)$ con $q < n$ [$\dim \operatorname{Ker} b \neq 0$]
- .) <u>Definita negativa</u> se $sg(b) = (0, n)$ [$\dim \operatorname{Ker} b = 0$]
- .) <u>Indefinita</u> negli altri casi

.) b è non-degenere se $\operatorname{Ker} b = \{0_V\}$.

Es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. $b = b_{0,1,2}$, ovvero

$$b(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

b è bilineare e simmetrica. Calcoliamo la segnatura.

$$\operatorname{Ker} b = \{ p(x) \mid b(p(x), q(x)) = 0 \quad \forall q(x) \in V \}$$

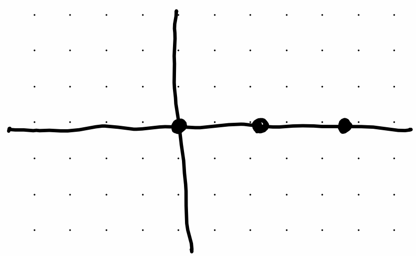
Sia $p(x) \in \operatorname{Ker} b$. Allora

$$b(p(x), 1) = 0 \Rightarrow p(0) + p(1) + p(2) = 0$$

$$b(p(x), x) = 0 \Rightarrow p(1) + 2p(2) = 0$$

$$b(p(x), x^2) = 0 \Rightarrow p(1) + 4p(2) = 0$$

$$\Rightarrow 2p(2) = 0 \Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow p(1) = 0 \Rightarrow p(0) = 0$$



$\Rightarrow p(x) = 0$

$\uparrow$

grado$(p) \leq 2$.

$\Rightarrow \operatorname{Ker} b = \{0\} \Rightarrow b$ è non-degenere.

Scegliamo $p(x)$ non isotropo.

$p(x) = 1 = v_1$: $\quad b(1,1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3 > 0$

$$\langle 1 \rangle^{\perp} = \{\, p(x) \mid b(1, p(x)) = 0 \,\}$$

$$= \{\, p(x) \mid p(0) + p(1) + p(2) = 0 \,\}.$$

Scegliamo $v_2 \in \langle 1 \rangle^{\perp}$ non isotropo:

$$v_2 = x - 1 .$$

$$b(v_2, v_2) = (-1)(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 2 > 0$$

$$\langle v_2 \rangle^{\perp} = \{\, p(x) \mid p(0)\overset{v_2(0)}{(-1)} + \overset{v_2(2)}{1}\, p(2) = 0 \,\}$$

$$= \{\, p(x) \mid -p(0) + p(2) = 0 \,\}$$

$$= \{\, p(x) \mid p(0) = p(2) \,\}$$

$$v_3 = (x-1)^2 \in \langle v_2 \rangle^{\perp}, \quad v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle.$$

b è definita positiva.

$$b(v_3, v_3) = (-1)^2(-1)^2 + 0\cdot 0 + 1^2\cdot 1^2 = 2 > 0$$

$\Uparrow$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortogonale $\Rightarrow sg(b) = (3, 0)$.

Sia $V = \mathbb{R}^n$, $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Allora $b = b_A$ dove $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, $A = A^t$.

$$b_A(X, Y) = X^t A Y.$$

<u>Def</u>: La <u>segnatura</u> di una matrice <u>simmetrica</u> A è per definizione, la segnatura di b_A

$$sg(A) := sg(b_A) = (p, q).$$

Ricordiamo che se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono due basi di $\mathbb{R}^n$, allora

$$B^t A_{b,\mathcal{B}'} B = A_{b,\mathcal{B}} \qquad \left(F_{\mathcal{B}'} = B F_{\mathcal{B}} \right)$$

ovvero $A_{b,\mathcal{B}}$ e $A_{b,\mathcal{B}'}$ sono <u>congruenti</u>.

dove B è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{B} \downarrow B \downarrow \mathcal{B}'$$

Teorema (Classificazione delle matrici simmetriche a meno di congruenza).
Due matrici simmetriche $n \times n$ sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

dim: Siano $A, A' \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetriche.
Supponiamo che A ed A' siano congruenti.
Allora $\exists$ B invertibile t.c. $B^t A' B = A$.
Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_A)$.
Allora

$$b_A(w_i, w_j) = w_i^t A w_j = w_i^t B^t A' B w_j =$$

$$= (Bw_i)^t A' (Bw_j) = b_{A'}(Bw_i, Bw_j)$$

$\Rightarrow$ $B\mathcal{B} = \{Bw_1, \dots, Bw_n\}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_{A'})$. Inoltre

$$b_A(w_i, w_i) = b_{A'}(Bw_i, Bw_i)$$

$\Rightarrow$ $sg(A) = sg(A')$.

Viceversa, se $sg(b_A) = sg(b_{A'})$, siano
$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_A)$ e
$\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_{A'})$.

Sia C la matrice che rappresenta b_A nella base $\mathcal{B}$:

$$C = \begin{pmatrix} v_1^2 & & & 0 \\ & v_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & v_n^2 \end{pmatrix}$$

Sia C' la matrice che rappresenta $b_{A'}$ nella base $\mathcal{B}'$:

$$C' = \begin{pmatrix} w_1^2 & & & 0 \\ & w_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n^2 \end{pmatrix}$$

A meno di riordinare le basi possiamo supporre

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} + & & \\ & \ddots & \\ & & + \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} - & & \\ & \ddots & \\ & & - \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right) \begin{array}{l} p \\ \\ q \\ \\ n-p-q \end{array} \overset{\text{Ipotesi}}{=} \begin{array}{l} p \\ \\ q \\ \\ n-p-q \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} + & & \\ & \ddots & \\ & & + \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} - & & \\ & \ddots & \\ & & - \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right) = C'$$

Diviamo per $\sqrt{v_i^2}$ o $\sqrt{-v_i^2}$:

Consideriamo le nuovi basi

$$\mathcal{E} = \{ E_1, \dots, E_p, E_{p+1}, \dots, E_{p+q}, v_{p+q+1}, \dots, v_n \}$$

e

$$\mathcal{E}' = \{ E_1', \dots, E_p', E_{p+1}', \dots, E_{p+q}', w_{p+q+1}, \dots, w_n \}$$

dove

$$E_i = \frac{v_i}{\sqrt{b_A(v_i, v_i)}} \quad \text{se} \quad 1 \le i \le p, \quad E_j = \frac{v_j}{\sqrt{-b_A(v_j, v_j)}} \quad \text{se } p+1 \le j \le p+q$$

$$E_i' = \frac{w_i}{\sqrt{b_{A'}(w_i, w_i)}} \quad \text{se} \quad 1 \le i \le p, \quad E_j' = \frac{w_j}{\sqrt{-b_{A'}(w_j, w_j)}} \quad \text{se } p+1 \le j \le p+q$$

Allora $\quad b_A(E_i, E_i) = \dfrac{b_A(v_i, v_i)}{b_A(v_i, v_i)} = 1 \qquad 1 \le i \le p$

$$b_A(E_j, E_j) = \frac{b_A(v_j, v_j)}{-b_A(v_j, v_j)} = -1 \qquad p+1 \le j \le q.$$

Quindi la matrice che rappresenta b_A in $\mathcal{E}$ è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

che è anche la matrice che rappresenta $b_{A'}$ in $\mathcal{E}'$.

Quindi $\exists$ B e B' invertibili t.c.

$$B^t D B = A \quad \text{e} \quad B'^t D B' = A'$$

$$\Rightarrow \quad D = (B'^t)^{-1} A' (B')^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad A = B^t (B'^t)^{-1} A' (B')^{-1} B =$$

$$= (B B'^{-1})^t A' (B B'^{-1}) \quad \Rightarrow A \text{ e } A' \text{ sono congruenti.} \quad \blacksquare$$

La base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots\}$ in cui b_A è rappresentato della matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \underline{\text{matrice di Sylvester di } b_A \text{ o di } A}..$$

si chiama una <u>base di Sylvester</u> di b_A o di A.