Domande / Commenti / Suggerimenti ?

- Perché se $F_{\mathcal{B}}(v)\, B^t A' B\, F_{\mathcal{B}}(w) = F_{\mathcal{B}}(v)\, A\, F_{\mathcal{B}}(w)$ $\forall v, w \in V$, allora $B^t A' B = A$?

Richiami: Sia V uno $\mathbb{K}$-sp. vett., $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Allora dati comunque

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad e \quad w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \in V$$

$$b(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\, b(v_i, v_j) = X^t A_{b,\mathcal{B}} Y$$

dove

$$A_{b,\mathcal{B}} = \left(b(v_i, v_j) \right)_{i,j=1}^{n} \; : \quad \underline{\text{matrice associata a } b \text{ nella base } \mathcal{B}}$$

Se $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ è un' altra base, sia

$A_{b,\mathcal{B}'}$ la matrice associata a b nella base $\mathcal{B}'$,

$$\underbrace{A_{b,\mathcal{B}}}_{\substack{\parallel \\ A}} = B^t \underbrace{A_{b,\mathcal{B}'}}_{\substack{\parallel \\ A'}} B$$

dove

B è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

Infatti, (Slide n° 10 della lezione 37)

$$(*) \quad F_{\mathcal{B}}(v)^t B^t A' B F_{\mathcal{B}}(w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t A F_{\mathcal{B}}(w) \quad \forall v, w$$

Infatti $(*)$ vale per $v = v_i$ e $w = v_j$

$$F_{\mathcal{B}}(v_i)^t B^t A' B F_{\mathcal{B}}(v_j) = F_{\mathcal{B}}(v_i)^t A F_{\mathcal{B}}(v_j)$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ e_i^t B^t A B e_j & & e_i^t A e_j \\ \parallel & & \parallel \\ (B^t A B)_i^j & & (A)_i^j \end{array}$$

- Def: A e A' si dicono congruenti se $\exists\, B$ invertibile tale che $B^t A' B = A$.

- b è simmetrica se $b(v,w) = b(w,v) \quad \forall v,w \in V$

- b_A è simmetrica se e solo se $A = A^t$ è simmetrica.

- Sia b simmetrica. Allora $v,w \in V$ si dicono ortogonali rispetto a b se $b(v,w) = 0$.

- Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice una base ortogonale di (V,b) se
$$b(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Esistenza di basi ortogonali

Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica

(Es: •) $V = \mathbb{K}^n$, $b = b_A$ con $A = A^t$

•) $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $b = b_{0,1,2,\dots,n}$ $\quad b(p,q) = \sum_{k=0}^{n} p(k)\, q(k)$

•) $V = \mathcal{C}^0([-\pi,\pi], \mathbb{R})$, $b(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$)

Notazione: $\quad v^2 := b(v,v)$

Un vettore v t.c. $v^2 = 0$ si chiama isotropo.

Problema: Stabilire se esiste una base ortogonale di (V, b).

Nucleo della forma

$$\mathrm{Ker}(b) = \{ v \in V \mid b(v,w) = 0 \quad \forall w \in V \}$$
$$= \{ \text{vettori ortogonali ad ogni vettore di } V \}$$

<u>OSS</u>: $\mathrm{Ker}(b)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Infatti, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\, b$, $\forall w \in V$

$$b(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha\, b(v_1, w) + \beta\, b(v_2, w) = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$

$\dim \mathrm{Ker}\, b$ = nullità della forma bilineare b.

Se $\dim \mathrm{Ker}\, b = 0$ allora si dice che b è <u>non-degenere</u>. Quindi,

b è non-degenere se l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori è 0_V.

Prop.: Se $V=\mathbb{K}^n$ e $b=b_A \overset{A=A^t}{\vee}$ allora $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Ker} A$

dim: Sia $X \in \operatorname{Ker} b_A$. Allora $\forall\, Y \in \mathbb{K}^n$

$$b_A(X,Y)=X^t A Y = 0$$

In particolare, per $Y=e_1, e_2, \ldots, o\ e_n$.

$$X^t A e_i = 0 \quad \forall\, i=1,\ldots,n$$

ovvero

$$X^t A^i = 0 \quad \forall\, i=1,\ldots,n$$

ovvero

$$X^t A = 0_{1\times n}.$$

ovvero $X^t \in \operatorname{Ker}(D_A) \Rightarrow X \in \operatorname{Ker} A^t \overset{A=A^t}{=} \operatorname{Ker} A$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} b \subseteq \operatorname{Ker} A$.

Viceversa, se $AX=0_n$ allora $Y^t A X = 0_n \quad \forall\, Y \in \mathbb{K}^n$

e quindi $X \in \operatorname{Ker}(b)$. ∎

<u>Es</u> :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^t$$

$$b_A(X,Y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$b_A\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y\right) = -y_1 - y_2 - y_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 0 \qquad \forall Y \in \mathbb{R}^3.$$

Quindi b_A è degenere.

Restrizione di b a sottospazi vettoriali

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale di V.
La <u>restrizione di b a U</u> è la forma

$$b|_U : U \times U \longrightarrow \mathbb{K} \;:\; b|_U(u_1, u_2) = b(u_1, u_2).$$

Osserviamo che $b|_U$ è bilineare.

Se $U = \operatorname{Ker} b$, allora $b|_{\operatorname{Ker} b}(u_1, u_2) = b(u_1, u_2) = 0$
(se $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker} b$).

Se U è un complementare di $\operatorname{Ker} b$, cioè $V = U \oplus \operatorname{Ker} b$
allora $b|_U$ è non-degenere.
Infatti, se $u \in U$ t.c. $b|_U(u, u') = 0 \quad \forall u' \in U$, allora

$$b(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{e quindi} \quad u \in U \cap \operatorname{Ker} b = \{0_V\}.$$

<u>Esercizio</u>: Se $U \subset V$ è un s.sp. vettoriale, allora

$$\operatorname{Ker} b|_U = \operatorname{Ker} b \cap U.$$

<u>Es</u>: Sia $\pi: x+z=0$ in $\mathbb{R}^3$. Sia $b = b_A$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcolare $\operatorname{Ker} b|_\pi$.

<u>Sol.</u>:

$$\pi = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2} \rangle.$$

$$b|_\pi (x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2) = x_1 y_1 \, b(u_1, u_1) + x_1 y_2 \, b(u_1, u_2)$$
$$+ x_2 y_1 \, b(u_2, u_1) + x_2 y_2 \, b(u_2, u_2).$$

$b(u_1, u_1) = 0 \qquad b(u_1, u_2) = 0 \qquad (\operatorname{Ker} b = \langle u_1 \rangle).$

$b(u_2, u_1) = 0 \qquad b(u_2, u_2) = 2 = a_{22}$

$b|_\pi (x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2) = 2 x_2 y_2 = 0 \quad \forall y_1, y_2$ se e solo se $x_2 = 0$ se ~~se~~ solo se $x_1 u_1 + x_2 u_2 \in \langle u_1 \rangle$. $\Rightarrow \operatorname{Ker} b|_\pi = \langle u_1 \rangle$

L'ortogonale di un sottospazio

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Definiamo l'ortogonale di U come l'insieme

$$U^{\perp} = \{ v \in V \mid b(v,u) = 0 \quad \forall u \in U \}.$$

OSS: $U^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V. (Esercizio!)

Es: $V = \mathbb{R}^3$, $b = b_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \langle e_2 \rangle$.

$$U^{\perp} = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid b_A(X, e_2) = 0 \} =$$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid X^t A^2 = 0 \} = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \}$$

$$= \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Ker}\, b} \rangle \supset \mathrm{Ker}\, b.$$

$\dim U^{\perp} = 2 = 3 - \dim U.$

$\dim U + \dim U^{\perp} = 3.$

e $U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^3$

Se però prendiamo $U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{Ker} b$ allora

$$U^{\perp} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid b_A\left(X, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Quindi non è vero che $\underbrace{U \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^3}$ perchè
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cap U^{\perp} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

La differenza è che e_2 non è isotropo mentre
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~e~~ è isotropo.

Teorema di decomposizione ortogonale

Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $b|_U$ è non-degenere. Allora (se V è f.g.)

$$U \oplus U^\perp = V$$

In particolare,

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V.$$

dim: Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U. Consideriamo la funzione

$$F : V \longrightarrow \mathbb{K}^k$$

$$v \longmapsto \begin{pmatrix} b(v, u_1) \\ b(v, u_2) \\ \vdots \\ b(v, u_k) \end{pmatrix}$$

F è lineare (esercizio!).

Inoltre F è <u>suriettiva</u>. Infatti, consideriamo i vettori

$$F(u_1) = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ b(u_1,u_2) \\ \vdots \\ b(u_1,u_K) \end{pmatrix}, \dots, \quad F(u_K) = \begin{pmatrix} b(u_K,u_1) \\ b(u_K,u_2) \\ \vdots \\ u_K^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^K.$$

Essi sono linearmente indipendenti:

$$0_{\mathbb{K}} = x_1 F(u_1) + \dots + x_K F(u_K) \quad \text{quindi}$$

$$0_K = \sum_{i=1}^{K} x_i \begin{pmatrix} b(u_i,u_1) \\ b(u_i,u_2) \\ \vdots \\ b(u_i,u_K) \end{pmatrix}$$

Quindi, $\forall j = 1, \dots, K$

$$\sum_{i=1}^{K} x_i \, b(u_i, u_j) = 0$$

quindi,

$$b\left(\sum_{i=1}^{K} x_i u_i, u_j\right) = 0 \qquad \forall j = 1, \dots, K$$

Quindi il vettore $\sum_{i=1}^{k} x_i u_i$ appartiene a U ed è ortogonale ad ogni elemento della base di U.

$\Rightarrow$ È ortogonale ad ogni elemento di U.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \in \operatorname{Ker} b|_U = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$$

$\Rightarrow \{F(u_1), \dots, F(u_k)\}$ è una base di $\mathbb{K}^k$

$\Rightarrow F : V \to \mathbb{K}^k$ è suriettiva.

Quindi

$$\dim \operatorname{Ker} F + k = \dim V$$

ovvero

$$\dim \operatorname{Ker} F + \dim U = \dim V$$

Osserviamo che $\operatorname{Ker} F = \{v \in V \mid b(v, u_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$

$$= \{v \in V \mid b(v, u) = 0 \ \forall u \in U\} = U^\perp$$

$\Rightarrow \dim U^\perp + \dim U = \dim V.$

Sia $u \in U \cap U^\perp$, allora $b(u,u') = 0 \quad \forall u' \in U$

$\Leftrightarrow u \in \operatorname{Ker} b|_U = \{0_V\} \Rightarrow U \cap U^\perp = \{0_V\}$

$\Rightarrow U \oplus U^\perp = V.$

$\square$

<u>oss</u>: $\operatorname{Ker} b|_U = U \cap U^\perp.$

Teorema : Sia V uno sp. vett. f.g. dotato di una forma bilineare e simmetrica $b: V \times V \to \mathbb{K}$. Allora esiste una base ortogonale di (V, b).

dim: Se $b = 0$ allora $\operatorname{Ker} b = V$ ed ogni base è ortogonale.

Supponiamo che $\operatorname{Ker} b \subsetneq V$ e sia U un suo complementare: $U \oplus \operatorname{Ker} b = V$.

Per concludere è sufficiente trovare una base ortogonale di $(U, b|_U)$. Infatti, se $\mathcal{B}_U$ è una tale base e $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b}$ è una base di $\operatorname{Ker} b$, allora $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b}$ è una base ortogonale di (V, b).

Quindi troviamo una base ortogonale di $(U, b|_U)$.

Sappiamo che $b|_U$ è non-degenere.
Se $\dim U = 1$ allora se $u \in U$ $u \neq 0$ allora $\{u\}$ è una base ortogonale di U.
Supponiamo che $\dim U > 1$.

<u>OSS</u> : $\exists\ u \in U$ t.c. $u^2 \neq 0$.
Infatti, se $\{u_1, .., u_k\}$ è una base di U che non è ortogonale, $\exists\ i, j$ t.c. $b(u_i, u_j) \neq 0$. Se $u_i^2 = u_j^2 = 0$ otteniamo

$$b(u_i + u_j, u_i + u_j) = u_i^2 + u_j^2 + 2b(u_i, u_j) = 2b(u_i, u_j) \neq 0$$

Sia quindi $u_1 \in U$ t.c. $u_1^2 \neq 0$. Quindi $b|_{\langle u \rangle}$ è non-degenere. Per il Teorema di decomposizione ortogonale si ha

$$U = \langle u \rangle^\perp \oplus \langle u \rangle$$

Ripetiamo il ragionamento con $\langle u \rangle^\perp$ al posto di U.

otteniamo un vettore $u_2 \in \langle u \rangle^\perp$ t.c. $u_2^2 \neq 0$.

Procedendo in questo modo otteniamo una Base ortogonale di U

$$\mathcal{B}_U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

t.c. $u_i^2 \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$.

Sia $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b} = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base di $\operatorname{Ker} b$.

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{\operatorname{Ker} b} = \{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

è una base ortogonale di (V, b).

$\blacksquare$

__OSS__: La matrice che rappresenta b nella base ortogonale $\mathcal{B}$ è diagonale:

$$A_{b,\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} u_1^2 & & & & & & \\ & u_2^2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & u_k^2 & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Es: $V=\mathbb{R}^2$, $b=b_A$ con $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

Allora la base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{e}=\{e_1,e_2\}$$

non è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2,b_A)$: infatti

$$b_A(e_1,e_2)=a_{12}=1\neq 0$$

In effetti, e_1 ed e_2 sono isotropi:

$$b(e_1,e_1)=a_{11}=0=a_{22}=b(e_2,e_2)$$

$$\langle e_1\rangle^{\perp}=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid X^t A e_1=0\}$$

$$=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=0\}=\langle e_1\rangle.$$

Quindi non possiamo estendere $\{e_1\}$ ad una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

Troviamo una base ortogonale di $(\mathbb{R}^2, b_A)$.

1) $\operatorname{Ker} b_A = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

$\Rightarrow$ b_A è non-degenere.

Dobbiamo cercare un vettore u_1 t.c. $u_1^2 \neq 0$.

$\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$, $b(e_1, e_2) \neq 0$

Seguendo la dimostrazione del Teorema, poniamo

$u_1 = e_1 + e_2$

(In effetti, $u_1^2 = e_1^2 + e_2^2 + 2\,b(e_1, e_2) = 2 \neq 0$)