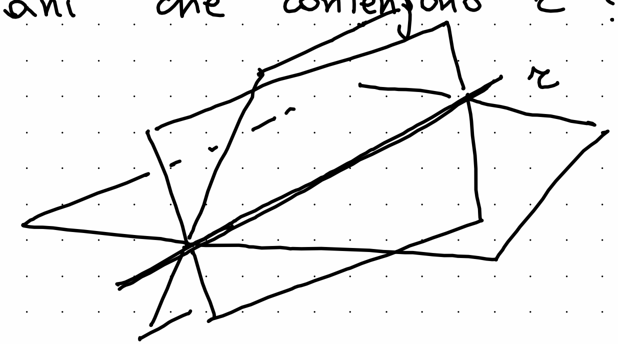
Fascio di piani per una retta

Sia r una retta di $\mathbb{K}^3$. Come sono fatti tutti i piani che contengono r?



$$r : \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

Sia π un piano t.c. $r \subset \pi$.

Allora $\pi : \alpha(ax+by+cz-d)+\beta(a'x+b'y+c'z-d')=0$ per qualche $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. $\pi = \pi_{(\alpha,\beta)}$.

$$\pi_{(\alpha,\beta)} = \pi_{(t\alpha,t\beta)} . \qquad t\neq 0$$

$$\pi : \quad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \beta_1$$

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 \end{array}\right) = 2 .$$

$\underline{Es}$: $\quad r_1 : \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \qquad r_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle.$

Osserviamo che $\quad 2+6-3 \neq 0 \quad$ e quindi r_1 ed r_2 non sono parallele.

Determinare il piano passante per r_1 e parallelo a r_2.

$\underline{Sol.}$:

$$\pi_{(\alpha,\beta)} : \quad \alpha(2x+3y-z-1)+\beta(x-y+2z-2)=0$$

$$\pi_{(\alpha,\beta)} : \quad (2\alpha+\beta)x+(3\alpha-\beta)y+(-\alpha+2\beta)z = \alpha+2\beta.$$

r_2 è parallela a $\pi_{(\alpha,\beta)}$ se e solo se

$$2\alpha+\beta+(3\alpha-\beta)2+(-\alpha+2\beta)3=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\alpha+5\beta=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha=-\beta.$$

Il piano cercato è $\quad \pi_{(1,-1)} : \ x+2y-3z=-1$

Spazi Euclidei

- Spazi vettoriali in cui possiamo misurare la distanza tra vettori e gli angoli.

- Dipende dalla scelta di un "metro".

che vuol dire scegliere una f-ne "distanza".

Scegliere una distanza dipende da scegliere una

Forma Bilineare

con opportune proprietà.

Forme bilineari

Siano V_1, V_2 e V_3 tre spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.
Una funzione

$$b : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_3$$

si dice <u>bilineare</u> se

- $b(-, v_2) : V_1 \longrightarrow V_3$ è lineare $\forall v_2 \in V_2$
- $b(v_1, -) : V_2 \longrightarrow V_3$ è lineare $\forall v_1 \in V_1$

ovvero $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u, v, v_1 \in V_1$, $\forall u', v', v_2 \in V_2$

$$b(\alpha u + \beta v, v_2) = \alpha\, b(u, v_2) + \beta\, b(v, v_2)$$
$$b(v_1, \alpha u' + \beta v') = \alpha\, b(v_1, u') + \beta\, b(v_1, v').$$

Se $V_1 = V_2 = V$ e $V_3 = \mathbb{K}$ allora b si dice una <u>forma bilineare</u> su V:

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

Es: Sia $V = \mathbb{K}^n$ e sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Definiamo

$$b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

come $\qquad\qquad X \in Mat_{n\times 1}$

$$b_A(X, Y) = X^t A Y \in \mathbb{K}$$

b_A è bilineare e si chiama la forma bilineare associata ad A.

Infatti,

$$b_A(\alpha X + \beta X', Y) = (\alpha X + \beta X')^t A Y = (\alpha X^t + \beta X'^t) A Y$$

$$= \alpha X^t A Y + \beta X'^t A Y = \alpha\, b_A(X, Y) + \beta\, b_A(X', Y)$$

Similmente

$$b_A(X, \alpha Y + \beta Y') = \alpha\, b_A(X, Y) + \beta\, b_A(X, Y').$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$b_A(X,Y) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 3 x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} x_i y_j$$

Vale in generale (Esercizio!): Data $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$

$$b_A(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad \text{dove } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

OSS: $\boxed{b_A(e_i, e_j) = a_{ij}}$

Matrice associata ad una forma bilineare

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.

Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare su V.

Allora $\forall\, v, w \in V\ \exists!\, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \quad w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n .$$

$$b(v,w) = b(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,\ y_1 v_1 + \dots + y_n v_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\ b(v_i,\ y_1 v_1 + \dots + y_n v_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j\ \underbrace{b(v_i, v_j)}$$

<u>Def</u>: La matrice $A_{b,\mathcal{B}} = \left(b(v_i, v_j) \right)_{i,j=1}^{n} \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ si chiama la matrice associata o che rappresenta b nella base $\mathcal{B}$.

Infatti,

$$b(v,w) = \sum_{i,j} x_i y_j \, b(v_i, v_j) = b_{A_{b,\mathcal{B}}}\left(F_{\mathcal{B}}(v), F_{\mathcal{B}}(w)\right)$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \overset{\text{base}}{\subset} V$, $b : V \times V \to \mathbb{K}$ data da

$$b(v_1, v_1) = 1 \qquad b(v_1, v_2) = 2 \qquad b(v_1, v_3) = 3$$
$$b(v_2, v_1) = 2 \qquad b(v_2, v_2) = 0 \qquad b(v_2, v_3) = -1$$
$$b(v_3, v_1) = 0 \qquad b(v_3, v_2) = -2 \qquad b(v_3, v_3) = 1$$

$$b(v_1 + v_2 + v_3, \; v_1 - v_2 - 2v_3) = b(v_1 v_1) - b(v_1 v_2) - 2b(v_1, v_3)$$
$$+ b(v_2, v_1) - b(v_2, v_2) - 2b(v_2, v_3) + b(v_3, v_1) - b(v_3, v_2)$$
$$- 2b(v_3, v_3)$$

$$b(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3, \; y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3) = X^t A_{b,\mathcal{B}} Y \quad \text{dove } A_{b,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme bilineari su $\mathbb{K}^n$

Sia $b: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ una forma bilineare su $\mathbb{K}^n$.

Allora

$$b(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, b(e_i, e_j) = X^t A_{b,e} Y$$

dove $e = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$A_{b,e} = \left(b(e_i, e_j) \right)_{i,j=1}^{n} \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

<u>Es</u>: $b(X,Y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$

Allora

$$b(X,Y) = X^t A Y \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>: $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è bilineare ($\det^{(3)}$ <u>non</u> è bilineare!)

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = (a, c)\, A \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Come cambia la matrice associata a b quando si cambia base?

Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V.
Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare.

$$b(v,w) = F_{\mathcal{B}}(v)^t A_{b,\mathcal{B}} F_{\mathcal{B}}(w) = F_{\mathcal{B}'}(v)^t A_{b,\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'}(w)$$

Come sono legate $A_{b,\mathcal{B}}$ e $A_{b,\mathcal{B}'}$?

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

B = matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Quindi $F_{\mathcal{B}'}(v) = B F_{\mathcal{B}}(v)$
$F_{\mathcal{B}'}(w) = B F_{\mathcal{B}}(w)$

Quindi

$$b(v,w) = F_{\mathcal{B}'}(v)^t A_{b,\mathcal{B}'} F_{\mathcal{B}'}(w) = (B F_{\mathcal{B}}(v))^t A_{b,\mathcal{B}'} (B F_{\mathcal{B}}(w))$$

$$= F_{\mathcal{B}}(v)^t \underbrace{B^t A_{b,\mathcal{B}'} B} F_{\mathcal{B}}(w) = F_{\mathcal{B}}(v) \underbrace{A_{b,\mathcal{B}}} F_{\mathcal{B}}(w)$$

Dato che questo vale per ogni $v, w \in V$, otteniamo

$$\boxed{B^t A_{b,\mathcal{B}'} B = A_{b,\mathcal{B}}}$$

<u>Def</u>: Due matrici $A, A' \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono <u>congruenti</u> se $\exists$ B invertibile t.c.

$$B^t A' B = A$$

<u>OSS</u>: "Essere congruenti" è una relazione di equivalenza

$$B^t A' B = A \quad \Rightarrow \quad A' = (B^t)^{-1} A B^{-1} = (B^{-1})^t A B^{-1}$$

(è simmetrica). <u>Esercizio</u>: Dimostrare che è riflessiva e transitiva.

Notiamo la differenza con le f.ni lineari

Sia $\mathcal{L}: V \to V$ un endomorfismo lineare.

Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V.

Sia A la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}$.

Sia A' la matrice che rappresenta $\mathcal{L}$ nella base $\mathcal{B}'$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"'] & V \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & V \arrow[d, "F_{\mathcal{B}'}"] \\
\mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

Allora $A' = B\,A\,B^{-1}$.

(A ed A' si dicono coniugate o simili).

Es: Sia $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$b(X,Y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Sia

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trovare la matrice che rappresenta b nella base $\mathcal{B}$.

Sol.: $b(X,Y) = X^t A Y$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b(X,Y) = b\left(B F_{\mathcal{B}}(X), B F_{\mathcal{B}}(Y)\right) = F_{\mathcal{B}}(X)^t \underbrace{B^t A B} F_{\mathcal{B}}(Y)$$

$$A_{b,\mathcal{B}} = B^t A B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Forme bilineari simmetriche

Una forma bilineare $b: V \times V \to \mathbb{K}$ si dice <u>simmetrica</u> se

$$b(v, w) = b(w, v) \qquad \forall v, w \in V.$$

<u>OSS</u>: Se $b = b_A$ è una forma bilineare su $\mathbb{K}^n$, allora

$$b \text{ è simmetrica} \iff A = A^t \text{ è simmetrica.}$$

Infatti,

$$b_A(Y, X) = Y^t A X \overset{Y^t A X \in \mathbb{K} = Mat_{1\times 1}(\mathbb{K})}{=} (Y^t A X)^t = X^t A^t Y = b_{A^t}(X, Y)$$

Quindi

b_A è simmetrica se e solo se $b_A(X, Y) = b_A(Y, X) = b_{A^t}(X, Y)$ $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n$. In particolare, $a_{ij} = b_A(e_i, e_j) = b_{A^t}(e_i, e_j) = a_{ji}$.

Esempi di f.ni bilineari simmetriche

Su $\mathbb{K}^n$:

- b_A con $A = A^t$.

In particolare, $b_{\mathbb{1}_n}$ = forma bilineare simmetrica standard di $\mathbb{K}^n$

$$b_{\mathbb{1}_n}(X,Y) = X^t \mathbb{1}_n Y = X^t Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

Notazione : $X \cdot Y := b_{\mathbb{1}_n}(X,Y) = X^t Y$

Ad Esempio se $n=2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Su $V = \mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

Scegliamo $n+1$ numeri $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$. Definiamo

$$b_{t_0,\dots,t_n}(p(x), q(x)) = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + \dots + p(t_n)q(t_n).$$

è bilineare e simmetrica.

Es:

$$b_{0,1}(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

$$b_{0,1}(1+x, 1+x+x^2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

Su $V = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R}) = \{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \text{ continua} \}$.

Definiamo la forma bilineare L^2 $(\ | \ ) : V \times V \to \mathbb{R}$

$$(f \mid g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$$

è bilineare e simmetrica.

<u>OSS</u>:

$$(f \mid f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 0 \iff f \equiv 0 .$$

Basi ortogonali

Sia $b: V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.
Diciamo che due vettori v e w di V sono
<u>ortogonali</u> se $b(v,w) = 0$.

$$v \perp w \overset{def}{\iff} b(v,w) = 0.$$

<u>OSS</u>: Dipende da b.

Dovremmo scrivere "ortogonali rispetto a b".
Una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice
<u>ortogonale</u> rispetto a b oppure <u>una base ortogonale della coppia (V, b)</u> se

$$b(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ è ortogonale rispetto a $b_{\mathbb{1}_n}$

$$b_{\mathbb{1}_n}(e_i, e_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j.$$

(Es $(1,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$)

$\mathcal{B}$ <u>non</u> è ortogonale rispetto a b_A

dove $A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$

$n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$n=3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n=4$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Infatti,

$$b_A(e_1, e_n) = 1 \neq 0$$