Domande/Commenti ? · Non ci sono gli appunti di Venerdì.

- Appunti su s.sp. affini
  - Appunti su Spazi Vettoriali
  - Geometria del piano
  - Geometria dello spazio.

Geometria affine del piano ($= \mathbb{K}^2$).

"Geometria affine" è un ossimoro.

con la metrica

non c'è metro

- intersezione
- parallelismo

} di sottospazi affini

Richiami:

- $U = v + U_0$ e $W = w + W_0$ sono parelleli se $U_0 \subseteq W_0$ oppure $W_0 \subseteq U_0$.

- Dati $U = v + U_0$ e $W = w + W_0$

$$U \cap W = \begin{cases} w' + U_0 \cap W_0 & \text{sse } v - w \in U_0 + W_0 \\ \phi & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$

Sia $U = X_0 + U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ un s.sp. affine, i.e. $X_0 \in \mathbb{K}^n$ e $U_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio vettoriale.

Le equazioni parametriche di U sono

$$U = X_0 + \langle v_1, \dots, v_r \rangle$$ dove $\{v_1, \dots, v_r\}$ è una base di U_0

Es: $$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= U_0}$$: Eq. parametriche di U

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U \iff \exists\ t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 + t_1 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Le <u>equazioni cartesiane</u> di $U = X_0 + U_0$ consistono nel descrivere U come le soluzioni di un sistema di equazioni lineari.

Se

$$U_0 = \operatorname{Ker} C \qquad (\text{Eq. cart. di } U_0) \qquad C \in \mathrm{Mat}_{r\times n}(\mathbb{K})$$

$$r = \dim U = \dim U_0$$

allora

$$U = \{ X \in \mathbb{K}^n \mid CX = CX_0 \}$$

e scriviamo

$$U : \; CX = CX_0 .$$

<u>dim</u>: Sia $u \in U$. Allora $\exists\, v \in U_0$ t.c. $u = X_0 + v$. Quindi

$$Cu = C(X_0 + v) = CX_0 + Cv = CX_0 \Rightarrow u \text{ è sol. di } CX = CX_0.$$

Viceversa, se $u \in \mathbb{K}^n$ t.c. $Cu = CX_0$, allora

$$Cu = CX_0 \Rightarrow C(u - X_0) = 0 \Rightarrow u - X_0 \in \operatorname{Ker} C = U_0$$

$$\Rightarrow u = X_0 + (u - X_0) \in X_0 + U_0 .$$

$\blacksquare$

Es: Trovare eq. cartesiane di $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

Sol.: $A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{Ker} D_A \simeq \operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \underset{\text{Dom.}}{\boxed{1}} & \underbrace{2 \quad 3}_{\text{Var. libere}} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} D_A = \langle (-2,1,0), (-3,0,1) \rangle$$

$$\Rightarrow U_0 : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C X_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Es: Trovare eq. cartesiane di

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4 \quad \text{è un piano.}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 - x_2 \\ 0 & 3 & 2x_2 - x_1 \\ 0 & 6 & x_3 - 2x_1 + 2x_2 \\ 0 & 5 & x_4 - x_1 + x_2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|l} 1 & -2 & * \\ 0 & 3 & 2x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_2 + 2x_1 = -2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 + x_2 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_1 = +\frac{2}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_2 + x_4 \end{array}\right)$$

$$U_0 : \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Verifichiamo ✓ !

$$\Longrightarrow \quad U : \begin{cases} -2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_4 = -9 \end{cases}$$

Es: Trovare eq. cartesiane di

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_0 =} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4 \quad \text{è un piano.}$$

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2 & 7/3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U_0 : \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow U : \begin{cases} -2x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_4 = -9 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Geometria affine di $\mathbb{K}^2$

I sottospazi affini di $\mathbb{K}^2$ sono:

- punti: $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Eq. par.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$ Eq. cart. di $U = \{X_0\}$.

- rette: $r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$ con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  la forma cartesiana di r:

  $$-bx + ay = c \qquad \text{dove} \quad c = (-b, a) X_0$$

Infatti,

$$\mathrm{Ker}\,(a, b) = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Es: $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow r: \ -3x + 2y = 1$

Una retta r di $\mathbb{K}^2$ è l'insieme delle soluzioni di una sola equazione lineare della forma

$$ax + by = c \quad \text{con} \quad (a,b) \neq (0,0).$$

Le sue equazioni parametriche sono

$$r = X_0 + \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \underline{\text{vettore direttore}} \text{ di } r$$

Es:

$$r: \ 2x + 3y = 1 \implies r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vettore direttore

Soluzione di $2x + 3y = 0$.

Condizioni di parallelismo tra due rette di $\mathbb{K}^2$

•) Due rette (in forma parametrica)

$r = X_0 + \langle v \rangle \quad , \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$ $\quad v \neq 0, \ w \neq 0$

sono parallele se e solo se $rg(v|w) = 1 \iff \det(v|w) = 0$

•) Due rette

$r: ax+by=c \quad , \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$

sono parallele se e solo se w è soluzione di $ax+by=0$

[se e solo se $rg\left(w \middle| \begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) = 1$.]

•) Due rette (in forma cartesiana)

$r: ax+by=c \quad , \quad s: a'x+b'y=c'$

sono parallele se e solo se $Ker(a,b) = Ker(a',b')$

$\iff rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1 \underset{\substack{(a,b)\neq(0,0) \\ (a',b')\neq(0,0)}}{\iff} \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

Condizioni di incidenza di due rette di $\mathbb{K}^2$

∘) Due rette (in forma parametrica)

$$r = X_0 + \langle v \rangle \quad , \quad s = Y_0 + \langle w \rangle$$

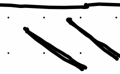
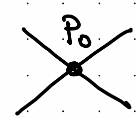
si intersecano se e solo se $X_0 - Y_0 \in \langle v, w \rangle = \langle v \rangle + \langle w \rangle$

se e solo se il sistema con matrice completa

$$(v \ w \mid X_0 - Y_0)$$

è risolubile se e solo se

$$\operatorname{rg}(\underbrace{v \ w}_{2\times 2}) = \operatorname{rg}(\underbrace{v \ w \mid X_0 - Y_0}_{2\times 3})$$

	$\operatorname{rg}(v \ w)$	$\operatorname{rg}(v \ w \mid X_0 - Y_0)$	
$r \equiv s$	1	1	
$r \cap s = \emptyset$ $r // s$	1	2	
$r \cap s = \{P_0\}$.	2	2	

Se $r \cap s = \{P_0\}$ come troviamo P_0 ?

$(v\ w)\, X = X_0 - Y_0$ ha l'unica soluzione

$$X = (v\ w)^{-1}(X_0 - Y_0) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

vuol dire

$$t_1 v + t_2 w = X_0 - Y_0$$

$$\Rightarrow \quad X_0 - t_1 v = Y_0 + t_2 w \in r \cap s$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = X_0 - t_1 v = Y_0 + t_2 w.$$

Es: $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Trovare la loro posizione reciproca.

Sol.:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r \cap s = \{ P_0 \}.$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftarrow P_0$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Due rette

$r: ax+by=c$, $s = X_0 + \langle v \rangle$

si intersecano se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{K}$ t.c. $X_0 + tv$ è soluzione di $ax+by=c$ se e solo se $\exists\, t \in \mathbb{K}$ t.c.

$$(a,b)(X_0+tv) = c$$

$$\Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{K} \text{ t.c. } t\,(a,b)v = c-(a,b)X_0$$

	$rg\,(a,b)$	$rg\,(a,b,c-(a,b)X_0)$
$r \equiv s$	0	0
$r \cap s = \emptyset$ $r // s$	0	1
$r \cap s = \{P_0\}$.	1	1

Es: Trovare la pos. reciproca di

$$r: \; 2x+3y=-1 \quad , \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2$$

Sol.:

$$(2,3)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = -1 \iff (2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,(2,3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$\iff 5 + 7t = -1 \iff 7t = -6$$

$$\iff t = -\frac{6}{7}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 1/7 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

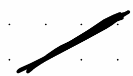
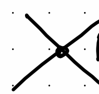
Due rette in forma cartesiana

$$r: \ ax+by=c \quad , \quad s: \ a'x+b'y=c'$$

si intersecano se e solo se il sistema

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

se e solo se $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$

	$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$	$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc\|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right)$	
$r \equiv s$	1	1	
$r \cap s = \emptyset$ $r // s$	1	2	
$r \cap s = \{P_0\}$	2	2	 P_0

Fascio di rette per un punto

Sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$.

Una retta $r : ax+by=c$ contiene P_0 se e solo se

$$ax_0+by_0 = c$$

Il fascio di rette per P_0 è

$$\mathcal{F}_{P_0} = \{ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \mid (a,b) \neq (0,0) \}$$

$$ax+by=ax_0+by_0$$

Es: $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a(x-1)+b(y-1)=0$

Le eq. parametriche di una retta per P_0 sono

$$P_0 + \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Retta per 2 punti distinti

Siano $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$.

Com'è fatta la retta per P_0 e P_1?

Sia r una retta per P_0 e P_1. Allora r passa per P_0

$\Rightarrow \quad r: \ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ per qualche $(a,b)\neq(0,0)$.

Imponiamo il passaggio per P_1 e troviamo

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0 \qquad (*)$$

Quindi (a,b) devono soddisfare $(*)$, ad esempio

$$(a,b) = \left(-(y_1-y_0), (x_1-x_0)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{r: \ -(y_1-y_0)(x-x_0)+(x_1-x_0)(y-y_0)=0}$$ Eq. cart.

Se $x_1 \neq x_0$ e $y_1 \neq y_0$:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}}$$

Eq. par.: $\quad P_0 + \langle P_1 - P_0 \rangle$