1. Domande / suggerimenti / commenti ?
2. Richiami
3. Algoritmo per trovare eq. parametriche e cartesiane di sottosp. vettoriali di $\mathbb{K}^m$
4. Geometria affine.
5. Geometria affine del piano

Piano per oggi.

Richiami: I 4 sottospazi fondamentali associati ad una matrice:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^m \supseteq \boxed{Im(S_A) = Col(A)} \arrow[d, leftrightarrow, squiggly] & & Ker(S_A) \subseteq \mathbb{K}^n \arrow[d, leftrightarrow, squiggly] \\
& A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K}) \arrow[ul, squiggly] \arrow[dl, squiggly] \arrow[ur, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & \\
\mathbb{K}_m \supseteq \boxed{Ker(D_A)} & & Im(D_A) \subseteq \mathbb{K}_n
\end{tikzcd}$$

$$D_A : \mathbb{K}_m := Mat_{1\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_n := Mat_{1\times n}(\mathbb{K})$$

$$\dim Im\, S_A + \dim Ker\, D_A = m \quad ; \quad \dim Ker\, S_A + \dim Im\, D_A = n$$

$$\boxed{rg(A) = rg(A^t)}$$

Posto $U := Im(S_A) \rightsquigarrow U = \langle A^{j_1}, \dots, A^{j_r} \rangle$ Eq. Par. di U

$\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ col. dom. di A

Se $\{Y_1, \dots, Y_{m-rg(A)}\}$ è una base di $Ker\, D_A$, allora le eq. cartesiane di U sono
$$\begin{cases} Y_1 X = 0 \\ Y_2 X = 0 \\ \vdots \\ Y_{m-rg(A)} X = 0 \end{cases}$$

Dato $U = \langle v_1, \dots, v_K \rangle \subset \mathbb{K}^m$

Eq. parametriche di U : Trovare una base di U.

$A = (v_1 | \dots | v_K) \rightsquigarrow S \Rightarrow$ colonne dominanti.

Eq. cartesiane di U : Trovare una base di $\mathrm{Ker}(D_A)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^m \arrow[r, "S_{A^t}"] \arrow[d, "()^t"', "\cong"] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\cong"', "()^t"] \\
\mathbb{K}_m \arrow[r, "D_A"] & \mathbb{K}_n
\end{tikzcd}
$$

Se $\{Y_1, \dots, Y_{m-rg(A)}\}$ è una base di $\mathrm{Ker}\, A^t$, una base di $\mathrm{Ker}\, D_A$ è $\{Y_1^t, Y_2^t, \dots, Y_{m-rg(A)}^t\}$.

$A^t \rightsquigarrow \mathrm{rref}(A^t) \rightsquigarrow$ soluzioni-base.

$$
U : \begin{cases} Y_1^t X = 0 \\ \vdots \\ Y_{m-rg(A)}^t X = 0 \end{cases}
$$

Se $\dim U = r$, ci vogliono $n-r$ equazioni.

$\dim U = 1$, $U \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow 2$ equazioni.

$ax + by + cz = 0$: definisce un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$ se $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Es: Trovare eq. parametriche

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sol.:

$$U = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \underset{\text{var. libera}}{1} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\operatorname{Ker} (1\ 2\ 3) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow U : \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

<u>Teorema</u>: Sia $U \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottosp. vettoriale di dimensione K. Allora esiste una matrice C con le seguenti proprietà

1) $C \in Mat_{(n-K)\times n}(\mathbb{K})$
2) $\operatorname{Ker} C = U$ [Eq. cart. di U].

Per trovare C possiamo usare l'algoritmo:

i) Sia $A \in Mat_{n\times K}(\mathbb{K})$ t.c. $U = Col(A)$
ii) $(A \mid \mathbb{1}_n) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} S' & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ con S' a scala

$n-K$

<u>dim</u>:

$\operatorname{rg} A = K \Rightarrow$ le colonne di A sono tutte dominanti.

Sia S una forma a scala di A allora

$$S = \left(\begin{array}{c} S' \\ \hline 0_{(n-K)\times n} \end{array}\right) \quad S' \text{ è a scala.}$$

$\exists\, T$ invertibile t.c. $TA = S \Rightarrow T = \left(\begin{array}{c} T_1 \\ \hline T_2 \end{array}\right) \Rightarrow$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right) A = \left(\frac{S'}{0}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} T_1 A = S' \\ T_2 A = 0 \end{array} \quad !$$

$$T \left(A \mid \mathbb{1}_n\right) = \left(\begin{array}{c|c} S' & * \\ \hline 0 & T_2 \end{array}\right)$$

Quindi poniamo $C = T_2$.

$$CA = 0 \Rightarrow, \ \operatorname{rg} C = n - k$$

$\Rightarrow$ le righe di C sono una base di $\operatorname{Ker} D_A$.

$\blacksquare$

$\underline{Es}$: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow U: \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Conviene:

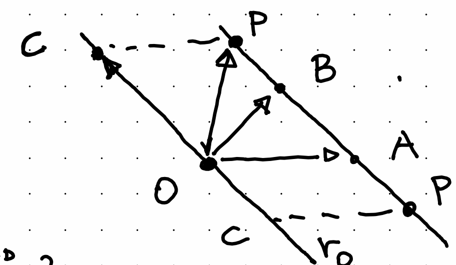
$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ 2 & x_2 \\ 3 & x_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_1 \\ \hline 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right) \Rightarrow U: \begin{cases} x_2 - 2x_1 = 0 \\ x_3 - 3x_1 = 0 \end{cases}$$

Sottospazi affini

Dati due sottoinsiemi U, W di un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale V, abbiamo definito la loro somma come il sottoinsieme

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \subset V$$

Es: $V = \mathcal{V}_O^2$, $A \neq O \neq B \neq A \in \mathcal{E}^2$



$$\boxed{r_{AB} = \{\vec{OA}\} + r_0}$$

Traslato di r_0 mediante $\vec{OA}$.

r_{AB} = retta per A e B.

$r_{AB} = \{\vec{OA}\} + r_0$, r_0 = retta per O e parallela a r_{AB}.

Sia $P \in r_{AB}$. Allora $\vec{OP} - \vec{OA} = \vec{OC}$ per $C \in r_0$. Quindi

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OC} \in \{\vec{OA}\} + r_0. \Rightarrow r_{AB} \subseteq \{\vec{OA}\} + r_0.$$

Viceversa, se $\vec{OC} \in r_0$ allora $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OD} \in r_{AB}$ infatti,

$\vec{OO} \neq \vec{OB} - \vec{OA} \in r_0 = \langle \vec{OB} - \vec{OA} \rangle \Rightarrow \vec{OC} = t(\vec{OB} - \vec{OA})$ per qualche $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA}) = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \in r_{AB}.$$

Def: Un <u>sottospazio affine</u> di un $\mathbb{K}$-sp. vettoriale V è un sottoinsieme $W \subset V$ della forma

$$W = v + W_0 = \{ v + w \mid w \in W_0 \}.$$

dove $v \in V$ e W_0 è un <u>sottospazio vettoriale</u> di V.

<u>OSS</u>: 0) Un sottospazio affine è il "traslato" di un s.sp. vettoriale.

1) $\boxed{W = v + W_0 \text{ è un s.sp. vettoriale} \iff v \in W_0.}$

Infatti, se $v \notin W_0$ allora $\forall\, v+w_1, v+w_2 \in W$ si ha

$$(v+w_1) + (v+w_2) = v + \underbrace{(v+w_1+w_2)}_{\notin W_0} \notin W.$$

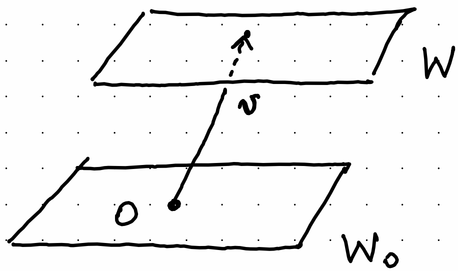
Se $v \in W_0$ allora $v + w \in W_0$ $\forall w \in W_0$ e quindi $W = W_0$ è un s.sp. vettoriale.

2) $\boxed{W_0 \text{ è univocamente determinato da } W:}$ Infatti,

$W = v + W_0 = v' + W_0'$, $W_0, W_0' \subseteq V$ s.sp. vettoriali. Allora $\forall\, w_0 \in W_0$ $\exists\, w_0' \in W_0'$ t.c. $v + w_0 = v' + w_0'$ $\Rightarrow$ $w_0 = v' - v + w_0' \in W_0'$ $[\, v' = v + w_0'' \Rightarrow v' - v \in W_0' \,]$ $\Rightarrow$ $W_0 \subseteq W_0'$. Similmente $W_0' \subseteq W_0$.

W_0 si chiama il sottospazio di giacitura di W

Idea:



La dimensione di un sottospazio affine è la dimensione del suo sottospazio di giacitura.

$$\dim W := \dim W_0 .$$

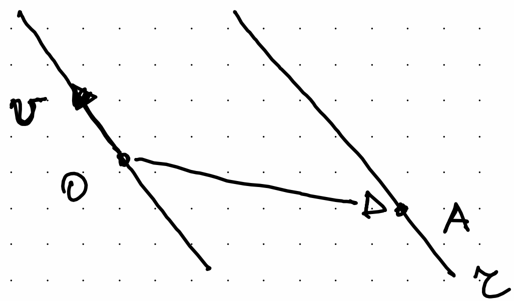
Se $\dim W = 0$ diciamo che W è un punto.
Se $\dim W = 1$ diciamo che W è una retta
Se $\dim W = 2$ diciamo che W è un piano
se $\dim W = \dim V - 1$ diciamo che W è un iperpiano.
Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di W_0 allora i suoi elementi si chiamano vettori direttori di W.

Es: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ è un vettore direttore di r_{AB}.

Sottospazi affini di $\mathcal{V}_O^2$

- <u>dimensione 0</u> : $\{\overrightarrow{OP}\}$ (punti).
- <u>dimensione 1</u> : $r = \overrightarrow{OA} + \langle v \rangle$ per $v \neq \overrightarrow{OO}$, $v \in \mathcal{V}_O^2$.

(rette = iperpiani)



$r_0 = \langle v \rangle$

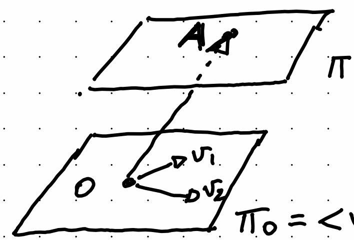
<u>dimensione 2</u> : $\mathcal{V}_O^2$.

Sottospazi affini di $\mathcal{V}_O^3$

punti : $\{\overrightarrow{OP}\}$ $P \in \mathcal{E}^3$.

rette : $\overrightarrow{OA} + \langle v \rangle$, $v \in \mathcal{V}_O^3 \setminus \{\overrightarrow{OO}\}$.

piani : $\pi : \overrightarrow{OA} + \langle v_1, v_2 \rangle$, $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_O^3$ lin. Ind.



$\pi_0 = \langle v_1, v_2 \rangle$ = giacitura di π

3-spazi : $\mathcal{V}_O^3$.

Esercizio: Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 - x_3 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Dimostrare che W è un s.sp. affine, non vettoriale, calcolarne la dimensione e trovare dei suoi vettori direttori.

Sol.: Sia $v \in W$, ad esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$.

Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$. Allora

$$X - v = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ soddisfa l'equazione } (x_1 - 1) + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow X - v \in \operatorname{Ker}(1, 1, 1) =: W_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle|\; x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

$\Rightarrow$ $W = v + W_0$. è un ss sp. affine con giacitura W_0.

I vettori direttori sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

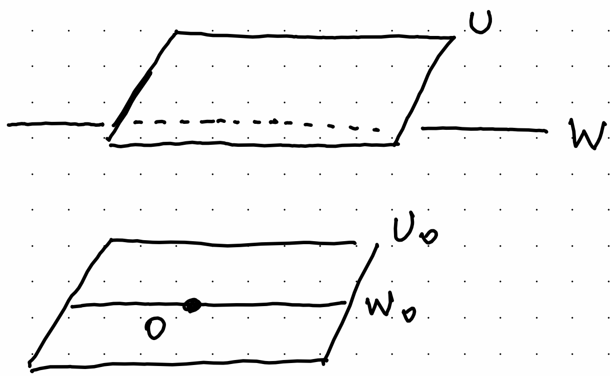
$W = v + \langle v_1, v_2 \rangle$: Eq. parametriche di W:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \iff \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases}$$

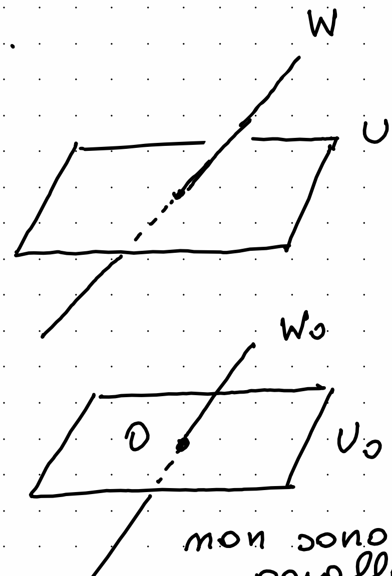
La <u>geometria affine</u> si occupa di studiare la <u>posizione reciproca</u> di sottospazi affini

<u>Def</u>: Due sottospazi affini
$$U = X_0 + U_0 \quad e \quad W = Y_0 + W_0 \subset V$$
si dicono <u>paralleli</u> se
$$U_0 \subseteq W_0 \quad \text{oppure se} \quad W_0 \subseteq U_0 .$$

<u>Es</u>:



sono paralleli



non sono paralleli.

Es: Le rette

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \quad e \quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\rangle$$

sono parallele.

Es: Il piano $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

e la retta $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle$

sono paralleli perché $\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\rangle \subsetneq \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$.

Problemi da studiare:
- Intersezione
- Parallelismo.

OSS 1: Se $v_1, v_2 \in X_0 + U_0 = U$ allora

$v_1 - v_2 \in U_0$.

OSS 2: Se $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ sono paralleli diciamo $U_0 \subseteq W_0$, allora ci sono 2 possibilità

$U \cap W = \emptyset$ oppure $U \cap W = U$

OSS 3: Se $U = X_0 + U_0$ e $W = Y_0 + W_0$ allora

$U \cap W \neq \emptyset \iff X_0 - Y_0 \in U_0 + W_0$

Infatti, se $v \in U \cap W$ allora $v = X_0 + u_0 = Y_0 + w_0$ e quindi $X_0 - Y_0 = w_0 - u_0 \in W_0 + U_0$.

Viceversa se $X_0 - Y_0 = u + w$ con $u \in U_0$ e $w \in W_0$ allora

$X_0 - u = Y_0 + w \in U \cap W$.

OSS4: Le soluzioni di un sistema lineare $AX=b$ di m equazioni in n incognite a coeff. in $\mathbb{K}$ formano un s.sp. affine di $\mathbb{K}^n$,

$$X_0 + \operatorname{Ker} A$$

OSS5: Se $U: AX=b$ e $W: A'X=b'$ allora

$$U \cap W : \begin{cases} AX = b \\ A'X = b' \end{cases}$$

In particolare, $U \cap W = \emptyset$ oppure è il s.sp. affine

$$X_0 + U_0 \cap W_0 = X_0 + \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} A'.$$