Richiami sui sistemi lineari

Sistema lineare di m eq. in n incognite a coeff. in $\mathbb{K}$ è un' eq. matriciale

$$Ax = b \qquad \text{dove } A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^m,\ x \in \mathbb{K}^n$$

Per il Teorema di Rouché-Capelli

$Ax = b$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|b)$.

Per risolverlo:

$$(A|b) \rightsquigarrow rref(A|b) = (\overbrace{rref(A)}^{R}|c)$$

$Ax = b$ è equivalente (i.e. ha le stesse soluzioni) di $RX = c$

<u>oss</u>: $(A|b) \rightsquigarrow (A'|b') \Rightarrow Ax = b$ è eq. a $A'x = b'$

Infatti $\exists$ C invertibile t.c.

$$(A'|b') = C(A|b) = (CA|Cb).$$

$CAx = Cb$. Se $Ax = b$ allora $CAx = Cb$ viceversa

Se $A'x = b'$ allora $C^{-1}A'x = C^{-1}b'$ ovvero $Ax = b$.

Se $Ax=b$ è risolubile le soluzioni sono

$$x_0 + \mathrm{Ker}\, A$$

dove x_0 è una sol. particolare del sistema.

<u>oss</u>: $\mathrm{Ker}\, A$ è l'insieme delle soluzione del sistema <u>omogeneo</u> $Ax = 0_m$, (= sistema omogeneo associato a $Ax=b$).

$\forall b \in \mathbb{K}^m$ il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se

$$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{K}^m \\ \Psi \\ b \end{array}$$ è iniettiva e suriettiva.

$\Longleftrightarrow$ A è invertibile. L'unica soluzione di $Ax=b$ è

$$x_0 = A^{-1} b.$$

$Ax=b$ si chiama non-singolare se ammette un'unica soluzione $\iff$ $\ker A = 0$ $\iff$ $\mathrm{rg}\,A = n$. $\iff$ f_A è iniettiva

Supponiamo A invertibile. Possiamo descrivere l'unica soluzione

$$x_0 = A^{-1}b$$

di $Ax=b$ utilizzando il Teorema di Cramer:

$$(x_0)_j = (A^{-1}b)_j \overset{\text{Cramer}}{=} \frac{1}{\det(A)}\left[\mathrm{Agg}(A)^t\, b\right]_j =$$

$$= \frac{1}{\det A}\,\mathrm{Agg}(A)^t_j\, b = \frac{1}{\det A}\left[\mathrm{Agg}(A)^j\right]^t b$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left(b_1 c_{1j} + b_2 c_{2j} + \dots + b_n c_{nj}\right)$$

$$b_1 c_{1j} + \dots + b_n c_{nj} = \det \left(A^1 | \dots | A^{j-1} | b | A^{j+1} | \dots | A^n \right)$$

$\uparrow$ j-esima colonna

$$A^j(b) := \left(A^1 | \dots | A^{j-1} | b | A^{j+1} | \dots | A^n \right).$$

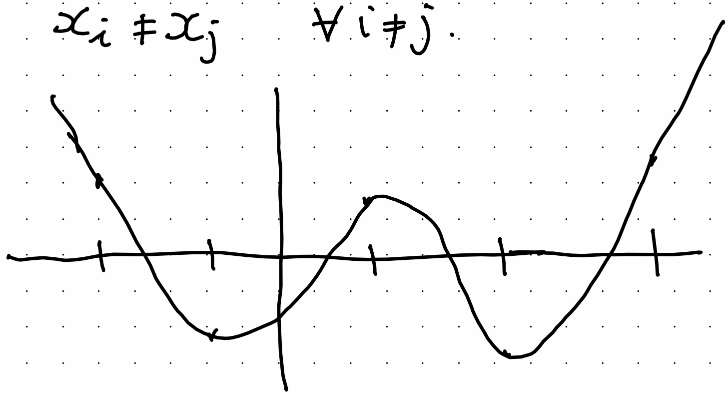
$$\boxed{(x_0)_j = \frac{\det(A^j(b))}{\det A}}$$

<u>Formula di Cramer</u>
per la soluzione di un sistema non-singolare quadrato.

Problema: calcolare il polinomio interpolatore di n p.ti.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

t.c. $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$.

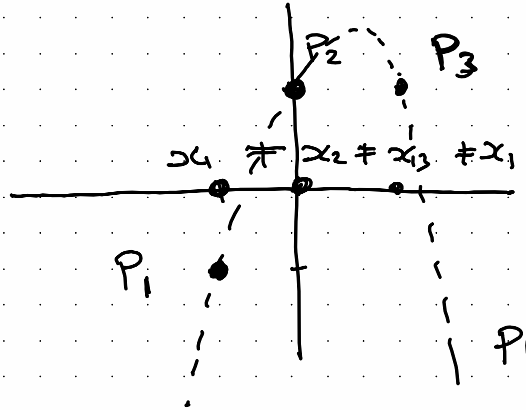


$$\exists!\ p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\le n-1} \quad \text{t.c.} \quad p(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Infatti: $F : \mathbb{R}[x]_{\le n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un *isomorfismo lineare*.

$$q(x) \longmapsto \begin{pmatrix} q(x_1) \\ \vdots \\ q(x_n) \end{pmatrix}$$

Es: $P_1 = \underset{y_1}{\overset{x_1}{\begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ -1 \end{pmatrix}}}$ $\quad P_2 = \underset{y_2}{\overset{x_2}{\begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}}}$ $\quad P_3 = \underset{y_3}{\overset{x_3}{\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \end{pmatrix}}}$



$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ pol. interpolatore

$$F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$$

$$q(x) \longmapsto \begin{pmatrix} q(-1) \\ q(0) \\ q(1) \end{pmatrix}$$

$p(x)$ = polinomio interpolatore $= F^{-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

La matrice associata a $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nelle basi canoniche è

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = V$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F_e"', "\{1,x,x^2\}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} F(1) & F(x) & F(x^2) \end{array} \end{array} = \mathrm{Van}(-1, 0, 1)$$

Dobbiamo risolvere il sistema $Ax = b$ dove $b = y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dato che

$$\det A = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$$

L'unica soluzione $x_0 = A^{-1} b$ è

$$x_0 = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A^1(b) \\ \det A^2(b) \\ \det A^3(b) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A^1(b) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det A^2(b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\det A^3(b) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio interpolatore è

$$p(x) = 1 + x - x^2.$$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_e"] \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Esercizio (sul Teorema degli orlati).

Sia $t \in \mathbb{C}$. e sia $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

Determinare $t \in \mathbb{C}$ t.c.

$rg\, A_t = 1$
$rg\, A_t = 2$
$rg\, A_t = 3$
$rg\, A_t = 0$

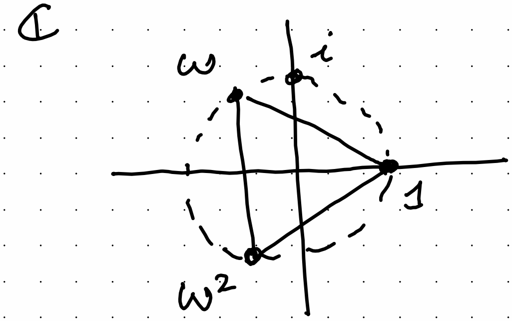
Sol.:

$rg\, A_t \geq 1$ perché $\exists$ 1-minore $\neq 0$

$$\det A_t = \det \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 1-t^3 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix} = (t^3-1) \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t^3-1)(1-t^3) = -(t^3-1)^2$$

$\det A_t = 0 \iff t^3 = 1 \iff t$ è una radice 3^a di 1:



$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

Quindi se $t \notin \{1, \omega, \omega^2\}$ allora $\operatorname{rg} A_t = 3$.

Se $\underline{t \in \{1, \omega, \omega^2\}}$: $1 \leq \operatorname{rg} A_t \leq 2$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & 1 \\ t^2 & 1 & t \end{pmatrix}$$

9 2-minori: sono tutti zero!

$\Rightarrow \operatorname{rg} A_t = 1 \quad \forall t \in \{1, \omega, \omega^2\}$.

Ricapitolando

$$\operatorname{rg}(A_t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in \{1, \omega, \omega^2\} \\ 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Forma Cartesiana e parametrica di sottosp. vett. di $\mathbb{K}^n$

Sia U un s.sp. vett. di $\mathbb{K}^n$. Come lo posso descrivere?

1° modo) Forma parametrica di U

- $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ $\quad \{v_1, \dots, v_k\}$ base di U.

Per trovarla: Trovare dei generatori $U = \langle u_1, \dots, u_\ell \rangle$

$A = (u_1 | \dots | u_\ell) \rightsquigarrow S$: forma a scala.

le colonne dominanti di A formano una base di U.

$$U = \operatorname{Im} S_A = \operatorname{Col}(A)$$

2° modo) $\quad U = \operatorname{Ker} B$

Es: in $\mathbb{K}^3$:
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \right\} = \operatorname{Ker} B$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid Bx = 0_\ell \} \quad \text{dove } \ell = \# \text{ equazioni.}$$

è descritto come le soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

<u>oss</u>: Ci intervengono le <u>righe</u> di B

Come fare a tradurre una forma nell'altra?

Data $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ perché moltiplichiamo a sinistra:

$$S_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m \quad ?$$

Se moltiplicassi a destra?

Consideriamo la f-ne moltiplicazione a destra per A

$$D_A : Mat_{1 \times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow Mat_{1 \times n}(\mathbb{K})$$

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto \underset{1 \times m}{(x_1, \dots, x_m)} \underset{m \times n}{A} = \underset{1 \times n}{(y_1, \dots, y_n)}$$

<u>Notazione</u>: $\quad \mathbb{K}_m := Mat_{1 \times m}(\mathbb{K})$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$D_A((x_1, x_2)) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 5x_2,\ 3x_1 + 6x_2).$$

oss: Se $x = (x_1, .., x_m) \in \operatorname{Ker} D_A$ allora

$$(x_1, .., x_m)\, A = (0, .., 0)$$

ovvero

$$(x_1, .., x_m)\, A^i = 0 \qquad \forall\ i = 1, .., n.$$

Quindi $\operatorname{Im} A \subseteq \{ Y \in \mathbb{K}^m \mid x_1 Y_1 + .. + x_m Y_m = 0 \ \forall\, (x_1, .., x_m) \in \operatorname{Ker} D_A \}$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker} D_A = \{ (a,b) \mid (a+2b=0,\ 2a+4b=0) \}$$

$$= \{ (a,b) \mid a=-2b \} = \langle (-2,1) \rangle$$

$$\operatorname{Im} A \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; -2x_1+x_2=0 \right\}$$

$$\operatorname{rg} D_A = \dim \operatorname{Im} D_A = m - \dim \operatorname{Ker} D_A$$

Oss: $\operatorname{rg} D_A = \operatorname{rg} A^t$. Infatti:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}_m \arrow[r, "D_A"] \arrow[d, "(\ )^t"', "\simeq"] & \mathbb{K}_n \arrow[d, "(\ )^t", "\simeq"'] \\ \mathbb{K}^m \arrow[r, "A^t"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$$\left[D_A((x_1,\dots,x_m)) \right]^t = \left[(x_1,\dots,x_m) A \right]^t$$

$$= A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A^t (x_1,\dots,x_m)^t$$

$$\operatorname{rg}(D_A) = \operatorname{rg} A^t \underset{(!)}{=} \operatorname{rg}(A) =$$

Sia $\{X_1, \dots, X_{m-\operatorname{rg}(A)}\}$ una <u>base</u> di $\operatorname{Ker} D_A$.

$$\operatorname{Im} A = \{ Y \mid X_i Y = 0_{\mathbb{K}} \ \forall i = 1, \dots, m-\operatorname{rg}(A) \} = \operatorname{Ker} B \quad \text{dove}$$

$$B = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{m-\operatorname{rg} A} \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$X_i A = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-\operatorname{rg}(A).$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} A \subseteq \{ Y \mid X_i Y = 0_{\mathbb{K}} \ \forall i = 1, \dots, m-\operatorname{rg}(A) \}.$$

$$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(D_A)$$

$$\dim \operatorname{Ker} B = m - \operatorname{rg} B = m - (\#\text{righe di } B) = \operatorname{rg} A$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} B.$$

Per trovare le eq. cartesiane di $\operatorname{Im} A$

1) Trovare una base di $\operatorname{Ker} D_A$

$$\{ X_1, \dots, X_{m-rg(A)} \}$$

2) $$B = \begin{pmatrix} X_1 \\ \hline \vdots \\ \hline X_{m-rg(A)} \end{pmatrix}$$

allora

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} B$: Eq. cartesiane di $\operatorname{Im} A$.

OSS: $\{ X_1, \dots, X_{m-rg(A)} \}$ è una base di $\operatorname{Ker} D_A$

$\Leftrightarrow$ $\{ X_1^t, \dots, X_{m-rg A}^t \}$ è una base di $\operatorname{Ker} A^t$

$(\ )^t$ è un isom.

Es: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$: Forma parametrica di U.
Trovare una forma cartesiana di U

Sol.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0 \quad x_1 = x_3$
$x_2 + x_3 = 0 \quad x_2 = -x_3$

$$\operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$U = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ ovvero

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Notazione: $U : \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$

U è l'insieme delle soluzioni di

Per passare da cartesiana a parametrica

$U: \quad BX = 0_m \quad \Rightarrow \quad U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ dove $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di $\operatorname{Ker} B$.

OSS: $\quad U = \operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} B \quad , \quad A$ e B di rango massimo

"Le colonne di A sono una base di U"

"Le righe di B sono una base di $\operatorname{Ker} D_A$"

$$\left.\begin{array}{l} \#\text{ equazioni che descrivono } U = \operatorname{Im} A = \\ \#\text{ righe di } B = \operatorname{rg} D_A = m - \operatorname{rg} A. \\ \\ \dim U + \#_{\text{minimo}}\text{ equazioni che descrivono} = m \end{array}\right\} \; U \subseteq \mathbb{K}^m$$

$U \subset \mathbb{R}^3 \qquad \dim U = 1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Servono $3-1=2$ equazioni per descrivere U.

$U \subset \mathbb{R}^4 \qquad \dim U = 1$

$\Rightarrow$ Servono $4-1=3$ equazioni per descrivere U.

\# equazioni di $\operatorname{Im} A$ $= \operatorname{rg} D_A = m - \operatorname{rg} A$

$\operatorname{rg} D_A = \operatorname{rg} A^t = \operatorname{rg} A$

$\dim \operatorname{Ker} D_A = m - \operatorname{rg} D_A = m - \operatorname{rg} A$.

$$X A^{i} = 0$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\[2ex] (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \leftarrow$$

moltiplico a destra per A.