Sistemi di equazioni lineari

Un' equazione lineare in n variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è un' equazione del tipo

$$(*) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

per qualche $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

Es: $n=1$: $2x = 3$ è lineare nella variabile x

$2x^2 = 1$ non è lineare nella variabile x.

$n=2$: $2x^2 + y = 3$ non è lineare nella variabile x ma è lineare nella variabile y.

$2x + 3y = 1$ è lineare nelle variabili x e y.

$(*)$ è equivalente all' equazione matriciale

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

"prodotto righe per colonne".

Una <u>soluzione</u> di

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

è una n-pla ordinata $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$a_1 \overline{x}_1 + a_2 \overline{x}_2 + \dots + a_n \overline{x}_n = b$$

vale in $\mathbb{K}$.

<u>Es</u>: Una soluzione di $2x = 3$ è $\overline{x} = \frac{3}{2} = 2^{-1} 3$

<u>OSS</u>: questa soluzione è unica!

Consideriamo l'equazione $0x = 3$ non ha soluzione in $\mathbb{R}$.

L'equazione $0x = 0$ ha come insieme delle soluzioni tutto il campo $\mathbb{K}$.

L' equazione

$$a x = b$$

ha come insieme delle soluzioni

$$\begin{cases} \{a^{-1}b = \frac{b}{a}\} & \text{se} \quad a \neq 0 \\ \emptyset & \text{se} \quad a = 0 \ \text{ e } \ b \neq 0 \\ \mathbb{K} & \text{se} \quad a = 0 \ \text{ e } \ b = 0 \end{cases}$$

<u>Terminologia</u>: I numeri $a_1, \dots, a_n$ delle equazione $(*)$ si chiamano i <u>coefficienti</u> dell' equazione.
Il numero b si chiama il <u>Termine noto</u> dell'equazione.

<u>OSS</u>: $p(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - b$

$(*) \iff p(x_1, \dots, x_n) = 0.$

Date m equazioni lineari nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti nello stesso $\mathbb{K}$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \qquad (\text{eq. } 1)$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \qquad (\text{eq. } 2)$$
$$\vdots$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \qquad (\text{eq. } m)$$

Una soluzione $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ di tutte queste m equazioni si chiama una soluzione del <u>sistema</u> delle m equazioni (eq1), .., (eqm).

Se siamo interessati a trovare soluzioni del sistema scriviamo

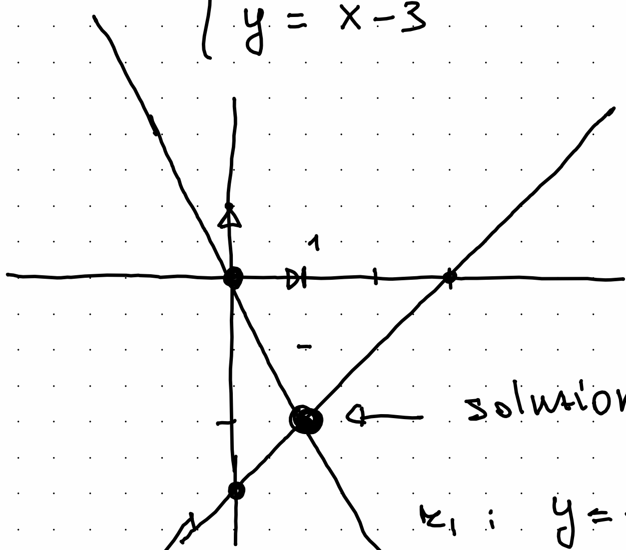
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \\ \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Es</u>: Cerchiamo soluzioni del sistema nelle variabili x, y a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Questo sistema è <u>equivalente</u> (= "ha le stesse soluzioni") al sistema

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = x - 3 \end{cases}$$



r_2: $y = x - 3$

soluzioni del sistema $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

r_1: $y = -2x$

Es: (Nicholson): Istituto vuole destinare 50'000€ all'anno per la ricerca sul cancro ed ha a disposizione 480'000€ all'anno, che può investire in un fondo che dà 10% di interessi annui ed in un altro che ne dà 11%.
Quanto deve investire al 10% e quanto all'11% di quei 480'000€ ?

Sol.: x = fondi da investire al 10%
y = fondi da investire all'11%.

$$\begin{cases} x + y = 480'000 \\ \frac{10}{100}x + \frac{11}{100}y = 50'000 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 10y = 4800000 \\ 10x + 11y = 5000000 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x + 10y = 4\,800\,000 \\ y = 200'000 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 280'000 \\ y = 200'000 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Sia
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare di m equazioni nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.
Una soluzione $\bar{X} \in \mathbb{K}^n$ di questo sistema non è altro che una soluzione dell'equazione matriciale

$$AX = b$$

dove $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$ si chiama la <u>matrice dei coefficienti</u>

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ si chiama la <u>matrice dei termini noti</u>

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ si chiama la <u>matrice delle variabili</u>

$(A|b) \in Mat_{m \times (n+1)}$ si chiama la <u>matrice completa del sistema</u>

Teorema (di Rouché-Capelli)

Il sistema $AX=b$ ammette soluzioni se e solo se
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b).$$

dim:

$AX=b$ ha soluzioni $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Im}(S_A)$ $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Col}(A)$

$\Leftrightarrow$ b non è una colonna dominante di $(A|b)$

$\Leftrightarrow$ le colonne dominanti di $(A|b)$ sono precisamente le colonne dominanti di A

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$. $\boxtimes$

Due sistemi lineari $AX=b$ e $A'X=b'$ ~~di~~ di m equazioni in n variabili (i.e. $A \,\&\, A' \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$, $b, b' \in \mathbb{K}^m$, $X \in \mathbb{K}^n$) si dicono <u>equivalenti</u> se hanno le stesse soluzioni.

Un sistema si dice <u>risolubile</u> se ammette almeno una soluzione.

$$AX=b \text{ è risolubile} \iff rg(A) = rg(A|b)$$

<u>Es</u>:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $b \notin Col(A)$ quindi il sistema $AX=b$ non è risolubile.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} i \\ 4i+1 \end{pmatrix}$: $b \in Col(A) = \mathbb{C}^2$ c

quindi il sistema $AX=b$ è risolubile.

Come sono fatte le soluzioni di un sistema risolubile?

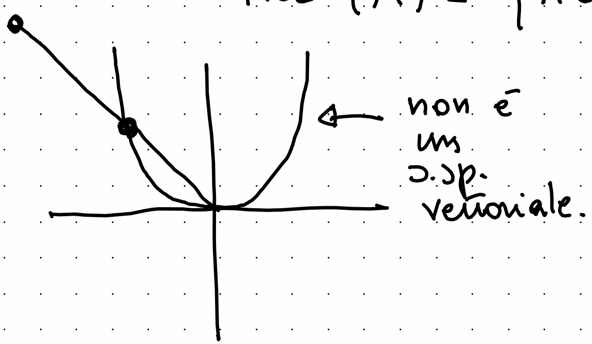
Sistemi omogenei:

Un sistema $AX=b$ si dice omogeneo se $b=0_m$.

$$AX=0_m.$$

Le soluzioni di un sistema omogeneo $AX=0_m$ sono

$$\mathrm{Ker}\,(A)=\{X\in\mathbb{K}^n \mid AX=0_m\}.$$



In particolare, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

<u>Teorema</u> (di struttura delle soluzioni di un sistema lineare risolubile)

L' insieme delle soluzioni di un sistema lineare $AX=b$ risolubile è

$$X_0 + \mathrm{Ker}(A) = \{ X_0 + v \mid v \in \mathrm{Ker}\, A \}$$

dove X_0 è una soluzione particolare del sistema.

<u>dim</u>: Sia $\bar{X}$ una soluzione di $AX=b$. Allora

$$A\bar{X} = b = AX_0 \Rightarrow A(\bar{X}-X_0) = 0_m \Rightarrow \bar{X}-X_0 \in \mathrm{Ker}\, A$$

$$\Rightarrow \bar{X} = X_0 + (\bar{X}-X_0) \in X_0 + \mathrm{Ker}\, A.$$

Viceversa se $v \in \mathrm{Ker}\, A$,

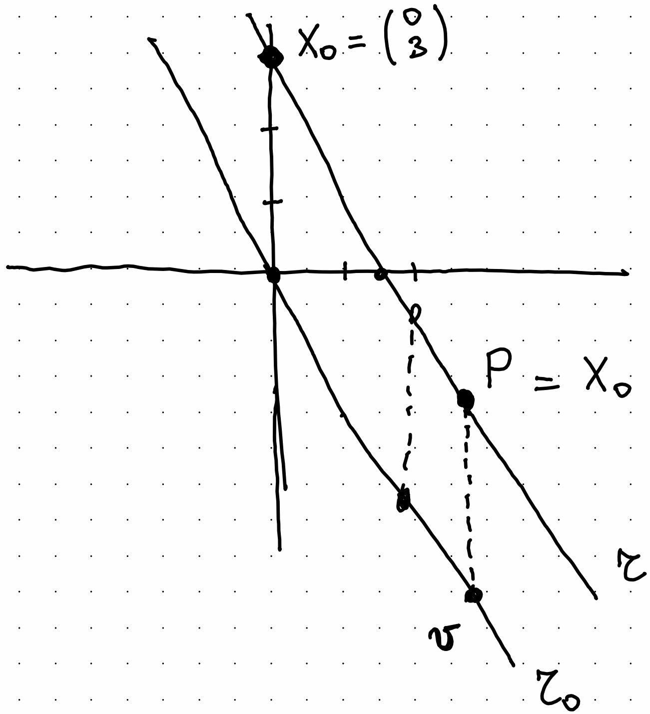
$$A(X_0+v) = AX_0 + Av = b + 0_m = b$$

e quindi X_0+v è soluzione di $AX=b$.

$\blacksquare$

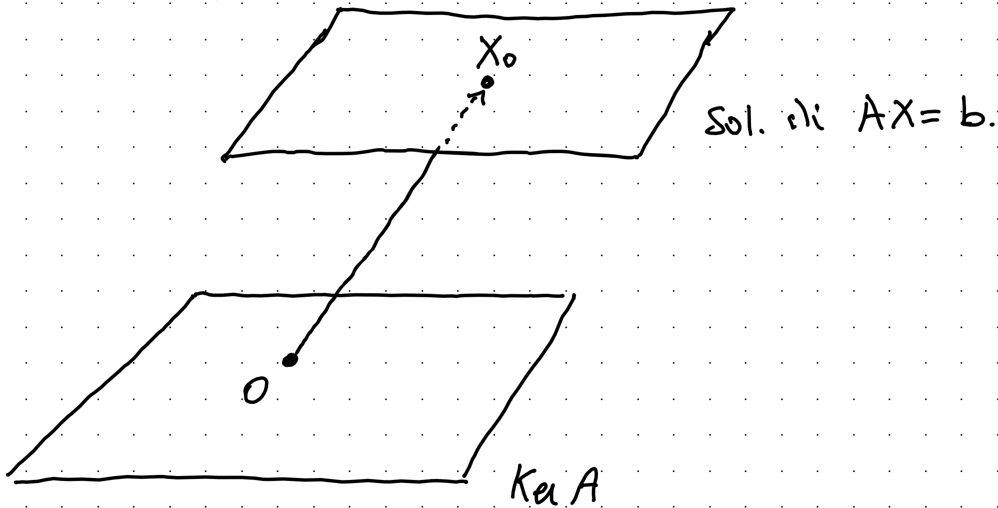
Es: $\quad r: \quad 2x + y = 3 \qquad A = (2,1), \; b = (3), \; x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$r_0: \quad 2x + y = 0$



$P = X_0 + v \qquad v \in r_0$

Significato geometrico:



Le soluzioni di un sistema lineare sono il traslato di un sottospazio vettoriale.

<u>oss</u>: $\{\text{Soluzioni di } AX=b\} = S_A^{-1}(b)$ = controimmagine di b tramite S_A.

Sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base di $\operatorname{Ker} A$.
Allora le soluzioni di $AX=b$ sono tutti i vettori della forma

$$X_0 + t_1 X_1 + \dots + t_k X_k$$

Descrizione parametrica delle soluzioni.

al variare di $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$.

Quindi sono ~~descritte~~ parametrizzate da k parametri

<u>OSS</u>: $k = n - rg(A)$ (per il Teorema della dimensione)

Si dice che il sistema ammette

$$\infty^{n-rg(A)}$$ soluzioni.

Per trovare le soluzioni di $AX=b$

1) Trovare una base di $\operatorname{Ker} A$

2) Trovare una soluzione particolare X_0 di $AX=b$.

<u>OSS</u>: Se operiamo sulle righe della matrice completa $(A|b)$ otteniamo una matrice $(A'|b')$ e i sistemi $AX=b$ e $A'X=b'$ sono <u>equivalenti</u>.

"le operazioni elementari sulle righe di $(A|b)$ non cambiano le soluzioni".

Per trovare le soluzioni di $AX=b$:

$$(A|b) \rightsquigarrow \operatorname{rref}(A|b) = (\underbrace{\operatorname{rref}(A)}_{R}|c)$$

1) base di $\operatorname{Ker} A$ = soluzioni-base di $RX=0_m$.

2) Per trovare X_0, nel sistema a scala ridotta

$$RX=c$$

poniamo le variabili libere uguali a 0
e le variabili dominanti uguali al corrispondente c_i

$$(X_0)_j = \begin{cases} c_i & \text{se } j \text{ è l'}i\text{-esima colonna dominante} \\ 0 & \text{se } j \text{ non è una colonna dominante.} \end{cases}$$

Es: Studiare (= stabilire se è risolubile e nel caso lo sia trovare tutte le soluzioni) il seguente sistema lineare in 3 variabili x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Sol.:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{R}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 2 \\ \quad x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \overbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}^{\operatorname{Ker} R = \operatorname{Ker} A}$$

$\parallel$ $RX = 0$

Comandi MATLAB:

Per Trovare X_0 : $A \backslash b$

Variabili $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: sym('x', [n, 1])

$$eqn(i) = a_{i1} * x(1) + a_{i2} * x(2) + \dots + a_{in} * x(n) == b_i$$

Per ritrovare A e b da eqn(1), .., eqn(m) si può usare il comando

[A, b] = equationsToMatrix(eqn1, .., eqnm)