Richiami: Applicazioni del determinante:

1) $$A \, Agg(A)^t = \det(A)\, \mathbb{1}_n \quad , \text{ dove } \quad Agg(A) = \begin{pmatrix} C_{11}(A) & \cdots & C_{1n}(A) \\ \vdots & & \\ C_{n1}(A) & \cdots & C_{nn}(A) \end{pmatrix}$$

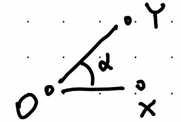
$$C_{ij}(A) = \text{cofattore } (i,j) = \det(A_{i,j})\,(-1)^{i+j}$$

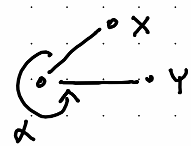
COR: Se A è invertibile, allora $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, Agg(A)^t}$

2) Il determinante è "un'area orientata" (per $n=2$)

$$A: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$A(X,Y) = \begin{cases} \text{Area}(0,X,Y) & \text{se} \quad \alpha \leq 180^\circ \\ -\text{Area}(0,X,Y) & \text{se} \quad \alpha > 180^\circ \end{cases}$$



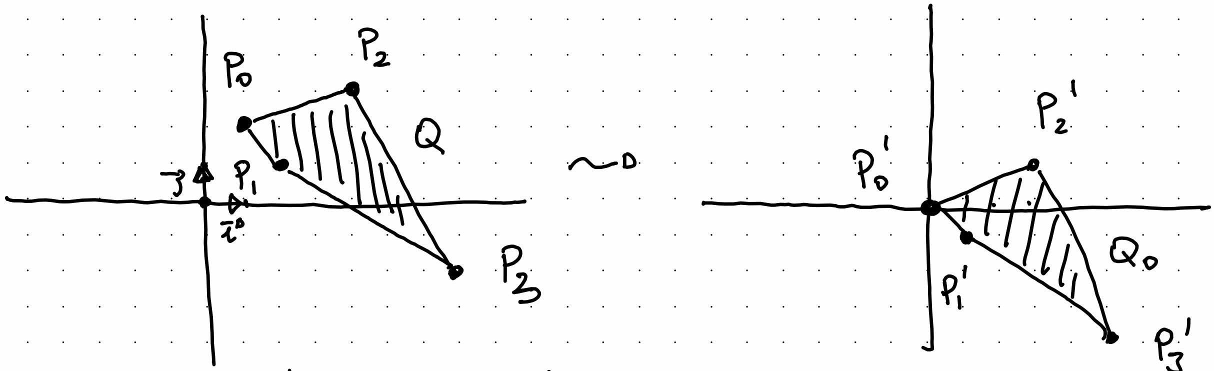


$$A(X,Y) = \frac{1}{2}\det(X|Y)$$

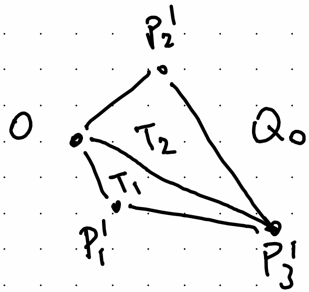
$$\text{Area}(\overset{\triangle}{0XY}) = |A(X,Y)| = \frac{1}{2}|\det(X|Y)|$$

Es: Calcolare l'area del quadrilatero di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$



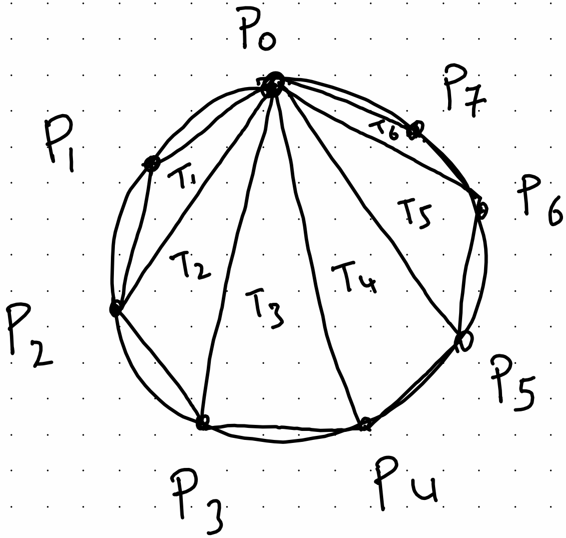
$$P_0' = 0 = P_0 - P_0, \quad P_1' = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2' = P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3' = P_3 - P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$



$$\text{Area}(Q_0) = \text{Area}(T_1) + \text{Area}(T_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det(P_1' \mid P_3')\right| + \frac{1}{2}\left|\det(P_2' \mid P_3')\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\right| = 1 + 9 = 10$$



$$\text{Area} = \sum_{i=1}^{6} \text{Area}(T_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \left| \det\left(P_{i+1} - P_0 \,\middle|\, P_i - P_0 \right) \right|$$

3) Determinante di Vandermonde

Dati $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

$$\mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[x]_{\leq n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{K}[x]_{\leq n-1} \arrow[d, "F_e"] \\ \mathbb{K}^n & \mathbb{K}^n \arrow[l, "\mathrm{Van}(x_1, \dots, x_n)"] \end{tikzcd}$$

$e = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

commuta.

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}.$$

$Van(x_1, \dots, x_n)$ è invertibile $\Leftrightarrow$ F è invertibile

$\Leftrightarrow$ $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$.

$n = 1$

$Van(x_1) = (1)$, $\det Van(x_1) = 1$ $\forall x_1 \in \mathbb{K}$

$n=2$:

$$Van(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Van(x_1, x_2)) = x_2 - x_1$$

$n = 3$:

$$\det(Van(x_1, x_2, x_3)) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix}$$

$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$

$x_3^2 - x_1^2 = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1)$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) =: \prod_{i > j} (x_i - x_j)$$

Teorema (Determinante di Vandermonde)

$$\det\left(\mathrm{Van}(x_1,\dots,x_n)\right) = \underbrace{\prod_{i>j}}_{\substack{\text{produttoria su}\\ 1\le j<i\le n}} (x_i - x_j).$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$ coeff. binomiale

Es:

$$\det\left(\mathrm{Van}(2,-1,3)\right) = (-1-2)(3-2)(3-(-1)) =$$

$$= -3\cdot 4 = -12.$$

Utilizzo del determinante per il calcolo del rango di una matrice qualunque : il Teorema degli orlati

Abbiamo già visto che se $A \in Mat_{\underline{n} \times \underline{n}}(\mathbb{K})$ allora

$$rg(A) = n \iff \det(A) \neq 0.$$

Es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. le colonne dominanti di A sono

A^1, A^2 : $B = (A^1 | A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango massimo

$\Rightarrow \det B \neq 0$.

Idea per il calcolo del rango : guardare a sottomatrici quadrate :

Es:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Le colonne dominanti sono A^1, A^3:

$\rightsquigarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ha rango massimo.

$2 = rg(B) = rg(B^t) \Rightarrow$ ci sono 2 righe di B lin. ind. B_1, B_2

$\rightsquigarrow \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\det C \neq 0$.

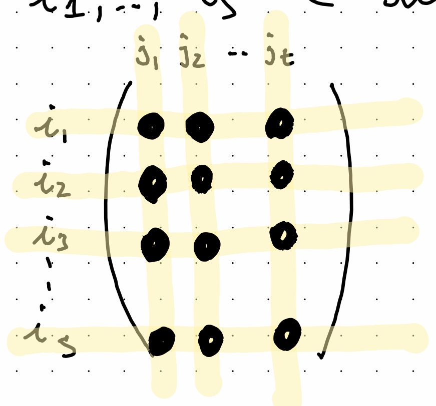
Def / Notazione: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Siano $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le m$ degli indici di riga e siano $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_t \le n$ degli indici di colonna.

La ~~matrice~~ notazione

$$A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t])$$

denota la sottomatrice di A supportata sulle ~~co~~ righe $i_1, \dots, i_s$ e sulle colonne $j_1, \dots, j_t$.



In MATLAB il comando è $A([i_1, \dots, i_s], [j_1, \dots, j_t])$.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & -10 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & -9 \\ -6 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A([1,3],[2,4]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A([1,3],[2,4,5]) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A([2,3,4],[2]) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Def: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ e sia

$$B = A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k]) \in Mat_{k \times k}(\mathbb{K})$$

una sua sottomatrice quadrata di ordine k.

Diciamo che la sottomatrice

$$A([i_1, \dots, i_k] \cup \{\ell\}, [j_1, \dots, j_k] \cup \{s\}) \in Mat_{(k+1) \times (k+1)}(\mathbb{K})$$

orla la matrice B con la riga ℓ e la colonna s, o anche che è un' orlata di B. $(\ell \notin \{i_1, \dots, i_k\},\ s \notin \{j_1, \dots, j_k\})$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B = A([1,2],[1,2])$$

$$\left.\begin{array}{l} A([1,2,3],[1,2,3]) \\[2ex] A([1,2,4],[1,2,3]) \end{array}\right] \text{le due orlate di } B$$

Def: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Dato $1 \leq k \leq \min(m,n)$, un <u>minore di ordine k di A</u> (o <u>k-minore</u>) è il determinante di una sottomatrice $A([i_1, \dots, i_k], [j_1, \dots, j_k])$ di ordine k.

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A([1,2,3],[2,3,4]) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = -4$$

gli 1-minori sono $3 \times 4 = 12$.

i 2-minori sono $3 \times 6 = 18$

i 3-minori sono 4

<u>Non ci sono 4-minori</u>!

~~Ad~~ esempio $\det A([1,2],[3,4]) = -2-1 = -3$ è un 2-minore

I k-minori di una $m \times n$ sono $\binom{m}{k} \times \binom{n}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

coeff. binomiali.

Teorema dei minori orlati (o degli orlati)

Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$rg(A) = r \iff$ $\exists$ un r-minore diverso da zero e tale che tutti i minori delle sue orlate sono zero.

In formule:

$rg(A) = r \iff \exists$ r indici di riga $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq m$ ed r indici di colonna $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ t.c.

$\det A([i_1, \ldots, i_r], [j_1, \ldots, j_r]) \neq 0$ e

$\det A([i_1, \ldots, i_r] \cup \{e\}, [j_1, \ldots, j_r] \cup \{s\}) = 0$

$\forall e \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ e $\forall s \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$.

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A con il Teorema degli orlati:

$$rg(A) = r \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$\exists\ a_{ij} \neq 0 \Rightarrow rg(A) > 0$: prendiamo l'1-minore a_{ij} ad esempio $a_{11} = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

gli orlati di 1 sono 6 $<<$ 18 = # 2-minori.

$rg(A) = 1 \Leftrightarrow$ questi 6 minori sono 0.

$\det\big(A([1,2],[1,2])\big) = 5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2.$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A([1,2],[1,2]) \neq 0 \implies rg(A) \geq 2.$

Gli orlati di questo 2-minore sono $2 << 12 = \#$3-minori

$rg(A) = 2 \iff$ questi 2 3-minori sono zero.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = -3 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

$\implies rg(A) \geq 3. \quad \implies rg(A) = 3.$

$\underline{Es}$: Stabilire se l'insieme $Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è lin. Ind.

$\underline{Sol.}$:

$$Z \text{ è lin. ind.} \iff rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \overset{\text{Teo orlati}}{\iff} \exists \text{ 2-minore} \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \implies Z \text{ è lin Ind.}$$

Es: Stabilire se

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è lin. Ind.

Sol.:

$$Z \text{ è lin. Ind.} \iff rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \overset{\text{Teo orlati}}{\iff} \exists \text{ 3-minore} \neq 0.$$

I 3-minori sono 4:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi $rg\, A < 3. \Rightarrow Z$ è lin. Ind.

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

I 2-minori $\Longleftrightarrow$ scegliere 2 righe e scegliere 2 colonne.

<u>righe</u>:

$\{1,2\}$

$\{1,3\}$

$\{2,3\}$

<u>colonne</u>:

$\{1,2\}$

$\{1,3\}$

$\{1,4\}$

$\{2,3\}$

$\{2,4\}$

$\{3,4\}$

$\#$ 2-minori $= 3 \times 6 = 18$

$rg(A) = K \iff \exists$ un K-minore $\neq 0$ e
Tutti i suoi orlati sono 0.