Domande : ?

Richiami : $\exists !$ funzione $\det^{(n)} : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ t.c.

1) $\det^{(n)}(P_{ij}A) = -\det^{(n)}(A)$
2) $\det^{(n)}(D_i(\lambda)A) = \lambda \det^{(n)}(A)$
3) $\det^{(n)}(F_{ij}(c)A) = \det^{(n)}(A)$
4) $\det^{(n)}(\mathbb{1}_n) = 1$

alternante sulle righe e multilineare sulle righe

1) $A \rightsquigarrow S$: a scala : $\exists C$ inv. t.c. $CA = S$

$\det^{(n)}(S) = S_1^1 S_2^2 \cdots S_n^n \Rightarrow \det(A) = \det(C^{-1}S)$
$= \det(C)^{-1} S_1^1 \cdots S_n^n$.

Teorema di Binet

$\det(P_{ij}) = -1$, $\det(D_i(\lambda)) = \lambda$, $\det(F_{ij}(c)) = 1$.

2) $\det^{(n)}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det^{(n-1)}(A_{i,j})(-1)^{i+j}$: sviluppo di Laplace della riga i.

oggi : 1) e 2) per colonne.

Piano :

1) $(AB)^T = B^t A^t$ dove $(\,)^t$ = trasposta ✓

2) Se B e C sono invertibili, allora
$rg(CA) = rg(AB) = rg(A)$ ✓

3) $rg(A^t) = rg(A)$

4) $\det(A^t) = \det(A)$

5) Possiamo calcolare il determinante operando sulle colonne.

La trasposizione

La <u>trasposizione</u> è la funzione

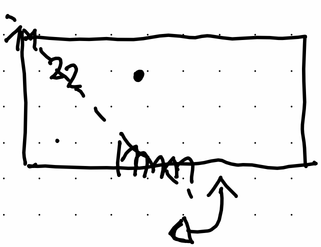
$$(\ )^t : Mat_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow Mat_{n\times m}(\mathbb{K})$$

$$A \longmapsto A^t = \text{la trasposta di } A$$

definita da

$$[A^t]_i^j := A_j^i$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$



È lineare:

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$$

Prop.: Siano $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in Mat_{n \times h}(\mathbb{K})$.
Allora
$$(AB)^t = B^t A^t$$

dim:
$$[(AB)^t]_i^j = [AB]_j^i = A_j B^i$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [A^t]_k^j [B^t]_i^k = (B^t)_i (A^t)^j$$
$$= [B^t A^t]_i^j \qquad \blacksquare$$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^t = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^t = (2, 3)$$

$$B^t A^t = (1, -1, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

Prop.: Siano $A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

AB è invertibile $\Leftrightarrow$ A e B sono entrambe invertibili.

In questo caso,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

dim:

$\Rightarrow$) Supponiamo che AB sia invertibile. Allora esiste C t.c. $(AB)C = \mathbb{1}_n = C(AB)$.

Quindi

$$A(BC) = \mathbb{1}_n \Rightarrow A \text{ ha inversa dst} \overset{A \text{ è quadrata}}{\Longrightarrow} A \text{ è invertibile.}$$

$$(CA)B = \mathbb{1}_n \Rightarrow B \text{ ha inversa sinistra} \underset{\substack{B \text{ è} \\ \text{quadrata}}}{\Longrightarrow} B \text{ è invertibile.}$$

$\Leftarrow$)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\,\mathbb{1}_n A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{1}_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathbb{1}_n B = B^{-1}B = \mathbb{1}_n$$

$\Rightarrow$ AB è invertibile. $\blacksquare$

COR: Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Allora

A è invertibile $\Leftrightarrow$ A^t è invertibile.

In questo caso

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

dim:

$\Rightarrow$) A invertibile $\Rightarrow \exists A^{-1}$

$\Rightarrow \mathbb{1}_n = AA^{-1} \Rightarrow (\mathbb{1}_n)^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$

OSS.: $\mathbb{1}_n^t = \mathbb{1}_n$

Quindi $(A^{-1})^t A^t = \mathbb{1}_n \overset{\substack{A \text{ e } A^t \text{ sono} \\ \text{quadrate}}}{\Rightarrow} A^t$ è invertibile e la sua inversa è $(A^{-1})^t$.

$\Leftarrow$) Dato che $(A^t)^t = A$, basta rifare il ragionamento sopra con A^t al posto di A. $\blacksquare$

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^t)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Prop.: Sia $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$. Siano $C \in Mat_{m \times m}(\mathbb{K})$ e $B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ due matrici invertibili. Allora

1. $rg(CA) = rg(A)$
2. $rg(AB) = rg(A)$

"Cambiare base in partenza o in arrivo non modifica il rango".

dim: 1.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, equal] & \mathbb{K}^m \arrow[d, "\simeq"', "C"] \\ \cdot \arrow[r, "CA"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Sia $\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\}$ una base di $Col(A)$.

Dimostriamo che $\{CA^{j_1}, \dots, CA^{j_r}\}$ è una base di $Col(CA)$.

$$x_1 CA^{j_1} + \dots + x_r CA^{j_r} = 0_m \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad Col(A) < \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow C(x_1 A^{j_1} + \dots + x_r A^{j_r}) = 0_m$$

$$\Rightarrow x_1 A^{j_1} + \dots + x_r A^{j_r} \in \operatorname{Ker} C = \{0_m\}$$

$$\Rightarrow x_1 A^{j_1} + \dots + x_r A^{j_r} = 0_m \underset{\{A^{j_1}, \dots, A^{j_r}\} \text{ lin. Ind.}}{\Rightarrow} x_1 = \dots = x_r = 0.$$

$$\Rightarrow \{CA^{j_1}, \dots, CA^{j_r}\} \text{ è lin. Ind.}$$

Sia $Y \in Col(CA)$. $Y = x_1 (CA)^1 + \dots + x_n (CA)^n$

$$= x_1 CA^1 + \dots + x_n CA^n = C(\underbrace{x_1 A^1 + \dots + x_n A^n}_{Col(A)})$$

$$\Rightarrow \exists\, y_1, \dots, y_r \in \mathbb{K} \text{ t.c. } x_1 A^1 + \dots + x_r A^r = y_1 A^{j_1} + \dots + y_r A^{j_r}$$

$$\Rightarrow Y = C(y_1 A^{j_1} + \dots + y_r A^{j_r}) = y_1 CA^{j_1} + \dots + y_r CA^{j_r}.$$

$$\Rightarrow \{CA^{j_1}, \dots, CA^{j_r}\} \text{ genera } Col(CA).$$

2.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "AB"] \arrow[d, "B"', "\simeq"] & \mathbb{K}^m \arrow[d, equal] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim \mathrm{Ker}\, A$$

$$\mathrm{rg}(AB) = n - \dim \mathrm{Ker}\, AB$$

Dimostriamo quindi che $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, AB$.

Sia $\{X_1, \dots, X_k\}$ una base di $\mathrm{Ker}\, AB$.

Facciamo vedere che $\{BX_1, \dots, BX_k\}$ è una base di $\mathrm{Ker}\, A$. (Esercizio!).

$\blacksquare$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$A\,A^{-1} = \mathbb{1}_n \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^{-1}$$

infatti

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

$$A^{-1} A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

$$(1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = \mathbb{1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1}$$

__Teorema__ : Sia $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$rg(A^t) = rg(A).$$

__oss__ : $\mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^m \qquad \mathbb{K}^m \xrightarrow{A^t} \mathbb{K}^n$

quindi A e A^t non sono simili, anche se hanno lo stesso rango.

__dim__ : Dimostriamola prima per $A = S$ a scala:

$$A = S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & p_2 & * \cdots & * \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p_r & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & p_2 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & * & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & p_r & \vdots & & \vdots \\ * & * & & * & 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(S) = rg(S^t) = r.$$

Sia A una matrice qualunque. Allora esiste C invertibile t.c. $CA = S$ è a scala.

$$\Rightarrow \quad A = C^{-1}S \quad \Rightarrow \quad A^t = (C^{-1}S)^t \underset{\text{Prop}}{=} S^t (C^{-1})^t \underset{\text{prop.}}{=} S^t (C^t)^{-1}$$

$$rg(A) = rg(C^{-1}S) \underset{\text{Prop.}}{=} rg(S) = rg(S^t) = rg(A^t C^t) \underset{\text{Prop}}{=} rg(A^t).$$

$\blacksquare$

<u>Es</u>: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 1$

$A^t = (1, 2, 3) \qquad rg(A^t) = 1$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad rg(A^t) = 2$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad rg(A^t) = 3 = rg(A).$

Operazioni elementari sulle colonne

operare sulle colonne = moltiplicare a destra per matrici elementari

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{1,2}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \qquad A \overset{C^1 \leftrightarrow C^2}{\rightsquigarrow} B = A P_{12}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D_2(2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}_{B} \qquad A \overset{C^2 \mapsto 2C^2}{\rightsquigarrow} B = A D_2(2)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= F_{12}(2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}_{B} : \qquad A \overset{C^2 \mapsto C^2 + 2C^1}{\rightsquigarrow} B = A F_{12}(c)$$

<u>oss</u>: $P_{ij}^t = P_{ij}$ <u>Es.</u>: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D_i(\lambda)^t = D_i(\lambda)$ <u>Es</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$F_{ij}(c)^t = F_{ji}(c)$ <u>Es</u>: $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

Quindi:

$$A \overset{C^i \leftrightarrow C^j}{\rightsquigarrow} AP_{ij} \qquad (AP_{ij})^t = P_{ij}^t A^t = P_{ij} A^t$$

$$A \overset{C^i \mapsto \lambda C^i}{\rightsquigarrow} A D_i(\lambda) \qquad (AD_i(\lambda))^t = D_i(\lambda)^t A^t = D_i(\lambda) A^t$$

$$A \overset{C^i \mapsto C^i + \lambda C^j}{\rightsquigarrow} A F_{ji}(\lambda) \qquad (AF_{ji}(\lambda))^t = F_{ji}(\lambda)^t A^t = F_{ij}(\lambda) A^t.$$

"operazione sulle colonne di A"

$\parallel$

"operazione sulle righe di A^t."

OSS:

$$\det(P_{ij}^t) = \det(P_{ij}) = -1$$

$$\det(D_i(\lambda)^t) = \det(D_i(\lambda)) = \lambda$$

$$\det(F_{ij}(c)^t) = \det(F_{ij}(c)) = 1$$

La trasposta di una matrice elementare è una matrice elementare dello stesso tipo.

Teorema: Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\det(A^t) = \det(A).$$

dim:

$$\det(A^t) = 0 \iff rg(A^t) < n \overset{\text{Teo}}{\iff} rg(A) < n \iff \det(A) = 0.$$

Supponiamo A (e quindi A^t) invertibile.
Allora esistono matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c.

$$A = E_1 E_2 \cdot \ldots \cdot E_k.$$

$$\Rightarrow \quad A^t = E_k^t E_{k-1}^t \cdot \ldots \cdot E_2^t E_1^t$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = \det(E_1)\det(E_2) \cdots \det(E_k) =$$

$$= \det(E_k^t)\det(E_{k-1}^t) \cdots \det(E_1^t) = \det(E_k^t \cdots E_1^t) = \det(A^t).$$

$\det(E_i^t) = \det(E_i)$

$\blacksquare$

COR: (Formula di Laplace sulle colonne):

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Fissato $1 \le j \le n$ si ha

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{i,j}) (-1)^{i+j}$$

dim:

sviluppo la j-esima riga di A^t

$$\det(A) = \det(A^t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det((A^t)_{ji}) (-1)^{i+j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(A_{ij}) (-1)^{i+j}$$

$$(A^t)_{ji} = (A_{ij})^t$$

$\square$

Conseguenze: Possiamo operare sulle colonne.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppo la 3^a colonna

$\parallel$ ← ha 2 righe uguali

0

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$