Sia $f : \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c.

$\det(\lambda)$

$\det\begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$

1) $f(P_{ij} A) = -f(A)$
2) $f(D_i(\lambda) A) = \lambda f(A)$ $\quad \lambda \in \mathbb{K}$
3) $f(F_{ij}(c) A) = f(A)$
4) $f(\mathbb{1}_n) = 1$

Se tale f esiste è unica e si chiama determinante:

$$A \rightsquigarrow E_1 A \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow E_K E_{K-1} \cdots E_2 E_1 A = R = \mathrm{rref}(A)$$

$\Rightarrow$ $A = F_1 F_2 \cdots F_K R$ dove $F_i = E_i^{-1}$ è una matrice elementare

e quindi $f(A) = c\, f(R)$ dove lo scalare c è

$c = f(F_1) \cdots f(F_K)$

$$f(P_{ij}) = f(P_{ij} \mathbb{1}_n) = -f(\mathbb{1}_n) = -1$$

$$f(D_i(\lambda)) = f(D_i(\lambda) \mathbb{1}_n) = \lambda f(\mathbb{1}_n) = \lambda \qquad (\lambda \neq 0)$$

$$f(F_{ij}(c)) = f(F_{ij}(c) \mathbb{1}_n) = f(\mathbb{1}_n) = 1$$

In particolare $c \neq 0$.

$$f(R) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{rg}\, A < n \\ 1 & \text{se } \mathrm{rg}\, A = n. \end{cases}$$

Teorema (di **Binet** o **del prodotto**):
Siano $A, B \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

dim:
oss: AB è invertibile $\Leftrightarrow$ A e B sono entrambe invertibili.
(Esercizio!)
Quindi

$$\det(AB) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ oppure } \det(B) = 0$$
$$\iff \det(A)\det(B) = 0.$$

Supponiamo che sia A che B siano invertibili.
Dimostriamo la formula:

dim 1 (con le matrici elementari):

A invertibile $\Leftrightarrow$ $\exists$ matrici elementari $E_1, \dots, E_k$ t.c. $A = E_1 \cdots E_k$.

B invertibile $\Leftrightarrow$ $\exists$ matrici elementari $F_1, \dots, F_t$ t.c. $B = F_1 \cdots F_t$.

Quindi

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k F_1 \cdots F_t)$$

$\det(EX) = \det(E)\det(X)$ $\forall E$ elementare $\forall X$

$$= \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(F_1) \cdots \det(F_t)$$

$$= \det(E_1 \cdots E_k) \det(F_1 \cdots F_t)$$

$$= \det A \det B.$$

dim 2 (usa l'unicità):

Consideriamo la f.ne $f: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ data da

$$f(X) = \frac{\det(XB)}{\det(B)}$$

è ben-definita poiché $\det(B) \neq 0$.

Dimostriamo che $f(X) = \det(X)$, $\forall X$. Se questo è vero

$$\det(A) = f(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)} \Rightarrow \det(A)\det(B) = \det(AB).$$

Basta far vedere che f ha le 4 proprietà:

1) $f(P_{ij}X) = \dfrac{\det(P_{ij}XB)}{\det(B)} = -\dfrac{\det(XB)}{\det(B)} = -f(X)$

2) $f(D_i(\lambda)X) = \dfrac{\det(D_i(\lambda)XB)}{\det(B)} = \lambda\dfrac{\det(XB)}{\det(B)} = \lambda f(X)$

3) $f(F_{ij}(c)X) = \dfrac{\det(F_{ij}(c)XB)}{\det(B)} = \dfrac{\det(XB)}{\det(B)} = f(X)$

4) $f(\mathbb{1}_n) = \dfrac{\det(\mathbb{1}_nB)}{\det(B)} = \dfrac{\det(B)}{\det(B)} = 1.$

$\blacksquare$

COR 1: $\det(AB) = \det(BA)$. **dim**: $\det(AB) \overset{\text{Binet}}{=} \det(A)\det(B)$
$= \det(B)\det(A)$
$= \det(BA)$ ∎

COR 2: Se A è invertibile, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Quindi il determinante è "moltiplicativo"

NB!: Il determinante $\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ **non** è lineare

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B) \quad \text{in generale}$$
$$\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A) \quad \text{in generale.}$$

OSS: $\det(\lambda A) = \det(\lambda A_1, \lambda A_2, \dots, \lambda A_n) = \lambda^n \det(A)$.

Abbiamo visto che

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Vediamo un' altra tecnica di calcolo:

Domanda: Perché $\det(A)=0$ se A ha una riga nulla?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D_2(0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\left(D_2(0)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(Una f.ne lineare manda 0 in 0).

Sviluppo di Laplace sulle righe

Es:

$$\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det^{(3)}\big((2,1,3),\ (3,0,1),\ (4,-1,-2)\big)$$

$$= \det^{(3)}\big(2\,(1,0,0) + 1\,(0,1,0) + 3\,(0,0,1),\ (3,0,1),\ (4,-1,-2)\big)$$

$$= 2\det^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\det^{(3)}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 3\det^{(3)}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\det^{(3)}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) + \det^{(3)}\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{array}\right) + 3\det^{(3)}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$= 2\det^{(3)}\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) - \det^{(3)}\left(\begin{array}{c|c|c} 3 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{\overset{(-1)^2}{\shortparallel}}{+} 3\det^{(3)}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$= 2\det^{(2)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \det^{(2)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 3\det^{(2)}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\,(0+1) - (-6-4) + 3\,(-3-0) = 3$$

1) $\det^{(3)}$ esiste se esiste $\det^{(2)}$

2) Questo fornisce una tecnica di calcolo <u>ricorsiva</u>:

<u>Idea</u>: Calcolare $\det^{(n)}$ come somma di $\det^{(n-1)}$ di opportune sottomatrici

$\underline{Es}$: $\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det^{(3)}\big((2,1,3),\ (3,0,1),\ (4,-1,-2)\big) =$

$$= \det^{(3)}\big((2,1,3),\ 3\,(1,0,0) + 0\,(0,1,0) + 1\,(0,0,1),\ (4,-1,-2)\big)$$

$$= 3\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -3\det^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -3\det^{(3)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 1\det^{(3)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -3\det^{(2)}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 0\det^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - 1\det^{(2)}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -3\,(-2+3) + 0\,(-4-12) - 1\,(-2-4) = 3$$

Def: Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Siano $1 \leq i, j \leq n$ due indici (i lo penso come indice di riga e j come indice di colonna). Definiamo

$$A_{i,j} \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$$

come la matrice ottenuta da A rimuovendo la riga i e la colonna j.

Es:

•) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A_{1,1} = (d) \quad A_{1,2} = (c)$

$\quad A_{2,1} = (b) \quad A_{2,2} = (a)$

$$\det^{(2)}(A) = ad - bc = a \det^{(1)}(A_{1,1}) - b \det^{(1)}(A_{1,2})$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \nearrow = a_{11} \det^{(1)}(A_{11}) - a_{12} \det^{(1)}(A_{1,2})$

•) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Teorema (Sviluppo di Laplace sulle righe)

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora, fissato $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\det{}^{(n)}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det{}^{(n-1)}(A_{i,j}) (-1)^{i+j}$$

In particolare, il determinante esiste.

Segni:

$$(-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Es:

sviluppiamo la 2ª riga $(i=2)$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 7 & -1\\ -2 & -1 & 13\end{pmatrix} =$$

$$= -4\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 13\end{pmatrix} + 7\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 13\end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{-4(26+3)}_{(-116)} + \underbrace{7(13+6)}_{(+133)} + \underbrace{1(-1+4)}_{(+3)} = 20$$

1ª riga

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 7 & -1\\ -2 & -1 & 13\end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix}7 & -1\\ -1 & 13\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 13\end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix}4 & 7\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(7\cdot 13-1)}_{(90)} - 2\underbrace{(4\cdot 13-2)}_{(100)} + 3\cdot\underbrace{(-4+14)}_{(30)} = 20$$

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{sviluppiamo la 1ª riga}}{=}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{sviluppo la 3ª riga}}{=}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Per calcolare il determinante di A

1) Usare le op. elementari sulle righe di A per creare una riga con <u>tanti</u> <u>zeri</u>

2) Sviluppare tale riga, con Laplace.